



РФЯЦ-ВНИИТФ  
РОСАТОМ

# Применение поправочных методов для моделирования задач переноса теплового излучения

А.А. Шестаков

# Методы поправок, синтетические методы, КР-методы, HOLO – алгоритмы

(новое – это хорошо забытое старое?)



## Методы поправок (1907 год)

Schmidt E. Auflosung der allgemeiner linearen integralgleichungen. Math. Ann. 64, 161, 1907.

## КР-методы (1958 год)

Воробьев В.Ю. Метод моментов в прикладной математике. М., Физматгиз, 1958.

Лебедев В.И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения. М., Наука, 1966.

## Синтетические методы (1963 год)

Kopp H.J. Synthetic Method Solution of the Transport Equation, Nucl. Sci. Eng., Vol.17, p.65, 1963.

## HOLO-алгоритмы (2017 год)

L. Chacon, G. Chen et al. Multiscale high-order/low-order (HOLO) algorithms and applications. J. Comp. Phys., Feb. 2017, v.330, p.21-45.

## Основные вопросы, рассматриваемые в докладе

1. Что объединяет методы поправок, синтетические методы и КР - методы? Может справедливо утверждение, что новые HОLО – алгоритмы – это уже известные поправочные, синтетические или КР - методы?
2. Чем отличаются методы поправок, синтетические методы и КР-методы?
3. При каких условиях можно получить решение этими методами, совпадающее с решением кинетического уравнения?
4. Нужна ли согласованность разностных схем на этапах для получения эквивалентного решения кинетического уравнения?

# Поправочные методы (с 1907 года)



**Поправочные методы** – это методы, основанные на определении главной части ошибки, допущенной на простой итерации. Ошибка, допущенная на простой итерации, вычисляется приближенно каким-либо более простым методом, который сходится быстрее простой итерации.

Основное использование в настоящее время – во ВНИИЭФ (КМ - метод).

1. Schmidt E. Auflosung der allgemeiner linearen integralgleichungen. Math. Ann. 64, 161, 1907.
2. Морозов В.Н. О решении кинетических уравнений с помощью  $S_n$ -метода. Теория и методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, 1962, с.91-117.
3. Федотова Л.П., Шагалиев Р.М. Конечно-разностный КМ метод для математического моделирования двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении. ММ, Т.3, №6, 1991, с.29-42.
4. Трощев В.Е., Юдинцев В.Ф. Итерационный метод постоянных поправок для решения спектральных задач переноса излучения. ВАНТ, 1978, в.2, с.17-22.

# КР-методы (с 1958 года)



**КР-методами называют комбинацию простой итерации кинетического уравнения и последовательности модельных задач для поправок.**

Основное использование – в России.

1. Воробьев В.Ю. Метод моментов в прикладной математике. М., Физматгиз, 1958.
2. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. ЖВМ и МФ, 1961, т.1, №5, с.922.
3. Лучка А.Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Киев, Наукова думка, 1963.
4. Лебедев В.И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения. М.,Наука,1966.
5. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. ЖВМ и МФ, 1966, т.6, №5, с.861
6. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. Киев, Наукова думка, 1967.

# Синтетические методы (с 1963 года)



Основное использование в настоящее время – в США.

1. Впервые термин 'синтетический' метод ввел Корр в 1963 году.
2. Гольдин В.Я. в 1964 году предложил ускорять простую итерацию в КД приближении.
3. Трощев В.Е. в 1966 году показал, что для ускорения простой итерации в КД приближении нужна согласованность схем.
4. Рид в 1971 году показал, что в DSA возможна расходимость итераций.
5. Алкофф в 1976 году показал, что для сходимости итераций в DSA нужна согласованность, о которой уже в 1966 году говорил Трощев.
6. Морел в 1982 году показал, что в анизотропном случае достаточно ускорять итерации через первые два момента в МСГ, т.е. в P1 приближении (диффузионного приближения не достаточно).
7. Ларсен в 1982 году сформулировал обязательную четырехшаговую процедуру для синтетических методов в плоской геометрии.

# Синтетические методы (основные первоисточники)



РФЯЦ-ВНИИТФ  
РОСАТОМ

1. Kopp H.J. Synthetic Method Solution of the Transport Equation, Nucl. Sci. Eng., Vol.17, p.65, 1963.
1. Троцкий В.Е. Решение кинетического уравнения и уравнения квазидиффузии по согласованным разностным схемам. М., Наука, 1966, с.177-185.
2. E.M.Gelbard and L.A.Hageman. The Synthetic Method as Applied to the SN Equations, Nucl.Sci.Eng., Vol.37, p.288, 1969.
3. W.H.Reed. The Effectiveness of Acceleration Techniques for Iterative Methods in Transport, Nucl.Sci.Eng., Vol.45, p.245, 1971.
4. R.E.Alcouff. A Stable Diffusion Synthetic Acceleration Method for Neutron Transport Iterations, Trans. Am. Nucl. Sos., Vol.23, p.203, 1976.
5. J.E.Morel. A Synthetic Acceleration Method for Discrete Ordinates Calculations with Highly Anisotropic Scattering, Nucl.Sci.Eng., Vol.82, p.34, 1982.
6. E.W.Larsen. Unconditionally Stable Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Slab Geometry Discrete-Ordinates Equations. Part I: Theory, Nucl.Sci.Eng., Vol.82, p.47, 1982.
7. Евдокимов В.В., Шагалиев Р.М. Согласованный метод ускорения итераций при решении двумерных задач переноса. ВАНТ, 1994, с.11-17.
8. Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Шестаков А.А. RDSA-метод для численного решения УПН. ВАНТ, 2007, в.2, с.3-19.
9. Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с TVD - реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения УПТИ. ВАНТ, 2013, в.3, с.3-15.



# Что объединяет методы поправок, синтетические методы и КР-методы

Методы поправок, синтетические методы, КР-методы состоят как минимум из двух этапов.

**Первый этап** - основной, на котором решается кинетическое уравнение методом простой итерации:

$$\frac{I_g^{s+1} - I_g^n}{c\Delta t} + \vec{\Omega}\nabla I_g^{s+1} + \alpha_g I_g^{s+1} = \frac{\alpha_{cg}}{4\pi} B_g^s + \frac{\alpha_{sg}}{4\pi} U_g^s$$

**Второй** и последующий этапы - вспомогательные, на которых решается кинетическое уравнение в упрощенной постановке (Д, P1n, SPn, M1, ЛТП).

Методы поправок и синтетические методы (DSA, TSA, NDA, CMFD) обычно состоят из двух этапов.

КР-методы (КР1, КР1Р2 и т.д.) состоят из двух и более этапов.

Профессором Вячеславом Ивановичем Лебедевым была разработана теория поправочных методов и сделано обоснование сходимости КР-методов.



# Метод оценки итерационных отклонений Морозова В.Н. (КМ – метод)



РФЯЦ-ВНИИТФ  
РОСАТОМ

Метод оценки итерационных отклонений Морозова В.Н. основан на классическом методе ускорения сходимости итераций Люстерника Л.А., примененном к УПН. КМ – метод Шагалиева Р.М. основан на методе Морозова В.Н., примененном к многогрупповому УПИ. Лебедевым В.И. сделано обоснование метода Морозова и показано, что при  $c \rightarrow 1$  сходимость может быть сколь угодно малой.

$$\mu \frac{\partial I^{s+1}}{\partial x} + (\kappa + k) I^{s+1} = \frac{k}{2} U^s$$

Представим итерлируемые функции в виде поправок, где  $I, U$  являются точными решениями УП, а  $\Delta I, \Delta U$  - отклонениями от точного решения

$$I^{s+1} = I + \Delta I^{s+1}, \quad U^{s+1} = U + \Delta U^{s+1}$$

Подставляя в УП получаем уравнение для поправок

$$\mu \frac{\partial \Delta I^{s+1}}{\partial x} + (\kappa + k) \Delta I^{s+1} = \frac{k}{2} \Delta U^{s+1} + q^{s+1}, \quad q^{s+1} = \frac{k}{2} (U^s - U^{s+1})$$

Если заменить  $\Delta U$  приближенно квадратурной формулой с одним узлом  $\Delta U = 2\Delta \bar{I}$

$$\mu \frac{\partial \Delta \bar{I}^{s+1}}{\partial x} + \kappa \Delta \bar{I}^{s+1} = q^{s+1}, \quad \bar{U}^{s+1} = U^{s+1} - \Delta \bar{U}^{s+1}, \quad \Delta \bar{U}^{s+1} = \int_{-1}^1 \Delta \bar{I}^{s+1} d\mu, \quad \bar{I}^{s+1} = I^{s+1} - \frac{\Delta \bar{I}^{s+1}}{9}$$

Окончательно 
$$\mu \frac{\partial I^{s+2}}{\partial x} + (\kappa + k) I^{s+2} = \frac{k}{2} \bar{U}^{s+1}$$

# Поправочный метод RDSA (Romb Diffusion Synthetic Acceleration)

(Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Шестаков А.А. ВАНТ, 2007, в.2, с.3-19.)



РФЯЦ-ВНИИТФ  
РОСАТОМ

Рассматривается система одномерных многогрупповых уравнений переноса нейтронов

$$\frac{\xi}{v_g} \frac{\partial N_g}{\partial t} + \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta N_g) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) N_g] + \alpha_g N_g = \sum_{g'=1}^G \frac{\beta_{g'/g}}{2} \int_{-1}^1 N_{g'} d\mu + \frac{f_g}{2} = Q_g(r)$$

$$q_g^0 \Delta U_g^{\nu+1} + \left[ 1 + q_g^0 (\delta_g^0 h^0)^{\nu+1/2} \right] \frac{1}{\Delta V_i} \left[ r_{i+1}^\eta (\Delta S_g)_{i+1}^{\nu+1} - r_i^\eta (\Delta S_g)_i^{\nu+1} \right] = (\Delta F_g^0)_i^{\nu+1},$$

$$q_g^1 \Delta S_g^{\nu+1} + \frac{\left[ 1 + q_g^1 \left( (\delta_g^0 h^0)^{\nu+1/2} - 2(\theta_{gg}^0 h^0)^{\nu+1/2} \right) \right]}{3\Delta V_i} \left[ r_{i+1}^\eta (\Delta U_g)_{i+1}^{\nu+1} - r_i^\eta (\Delta U_g)_i^{\nu+1} - \frac{\eta}{2} c_i (\Delta U_g)_{g,i+1/2}^{\nu+1} \right] = (\Delta F_g^1)_i^\nu,$$

$$q_g^0 = \frac{\xi}{\tau v_g} \left( (p_g^n)^0 \right)^{\nu+1/2} + \alpha_g - \beta_{gg}^s, \quad q_g^1 = \frac{\xi}{\tau v_g} \left( (p_g^n)^0 \right)^{\nu+1/2} + \alpha_g,$$

$$(\delta_g^0 h^0)_{i+1/2} = \frac{3}{2} S_1(\delta_g h \mu), \quad (\theta_{g'g}^0 h^0)_{i+1/2} = \frac{3}{2} S_1(\theta_{g'g} h \mu)$$

# Поправочный метод PSAC (P1 Synthetic Acceleration Correction Methods)

(Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А. ВАНТ, 2013, в.3, с.3-15.)



**1 этап** На каждой внешней итерации решается один раз кинетическое уравнение схемой TVDR с ньютоновскими итерациями по температуре

**2 этап** Применяем 4шаговую процедуру Ларсена для получения согласованной системы поправочных уравнений в P1-приближении, которую решаем схемой Ромб

$$\frac{\delta U^{\sigma+1}}{c\tau} + \text{div}_h(r^\eta \delta S^{\sigma+1}) + \alpha^\sigma \delta U^{\sigma+1} = \alpha_c^\sigma (B^{\sigma+1} - B^\sigma) + \alpha_s^\sigma (U^{\sigma+1} - U^\sigma)$$

$$\frac{\delta S^{\sigma+1}}{c\tau} + \frac{1}{3} \text{div}_h(\delta U)^{\sigma+1} + \alpha^\sigma \delta S^{\sigma+1} = 0$$

$$\frac{\delta E^{\sigma+1}}{\tau} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (\delta U_g^{\sigma+1} - \delta B_g^{\sigma+1})$$

$$\delta S^{\sigma+1} = S^{\sigma+1} - S^{\sigma+1/2} \quad \delta U^{\sigma+1} = U^{\sigma+1} - U^{\sigma+1/2}$$

$$\delta T_{i+1/2}^{k+1} = \left[ \frac{E^{\sigma+1/2} - E^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\sigma (\delta U_g^{k+1} - B_g^k + B_g^{\sigma+1/2})}{E_T^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\sigma B_{g,T}^k} \right]_{i+1/2}$$

# Заключение

- В настоящее время поправочные методы являются одними из самых популярных алгоритмов ускорения простой итерации;
- Основной вклад в создание, развитие и обоснование поправочных, синтетических и КР алгоритмов без сомнения внесли российские ученые: Воробьев В.Ю.(1958), Федоренко Р.П.(1961), Лебедев В.И.(1966), Бахвалов Н.С.(1966), Морозов В.Н.(1962), Гольдин В.Я.(1964), Троцкий В.Е.(1966), Юдинцев В.Ф.(1978), Шагалиев Р.М.(1991);
- За рубежом основной вклад в создание, развитие и обоснование поправочных и синтетических методов внесли: Schmidt E.(1907), H.J. Kopp (1963), R.E. Alcouff(1976), J.E. Morel(1982), E.W. Larsen(1982);
- В РФЯЦ-ВНИИТФ были реализованы поправочные методики расчета задач переноса RDSA и PSAC;
- В РФЯЦ-ВНИИЭФ реализована методика расчета задач переноса излучения в групповом приближении поправочным КМ методом.