

Об устойчивости разностных схем TVDR

А.А. Шестаков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академика Е.И. Забабахина», г.Снежинск

Уравнение переноса является одним из фундаментальных уравнений математической физики, широко используемых для описания процессов радиационной газовой динамики. Поэтому представляет интерес конструирование численных методов решения этого уравнения и изучение их свойств. Разностные схемы аппроксимируют уравнение переноса с разной точностью. В зависимости от порядка точности по прошествии некоторого промежутка времени возрастает отличие от точного решения. Монотонные разностные схемы первого порядка аппроксимации, как правило, дают «расплывающийся» со временем пространственный профиль. Схемы повышенного порядка аппроксимации могут приводить к существенной немонотонности.

Одним из путей построения схем повышенного порядка аппроксимации с улучшенными монотонными свойствами для решения уравнения переноса является переход к нелинейным схемам TVD, начало которым положил В.П.Колган [1]. В настоящее время опубликовано большое количество работ по схемам TVD (смотри, например, [2]). В этих работах рассмотрены как явные, так и неявные схемы TVD для решения гиперболических систем уравнений. Если рассматривать неявные схемы TVD при аппроксимации уравнения переноса, то это будут трехточечные или четырехточечные схемы из-за использования односторонних производных в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство одного из самых эффективных методов решения уравнения переноса – метода DS_n [3], где аппроксимация строится в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

В работе [4] был найден способ, как обойти эти трудности в методологии TVD. Такие схемы в дальнейшем были названы TVDR [5]. В работе [3] построена неявная схема MTVDR, в которой используется поправочный множитель, получаемый с помощью реконструкции TVD. В работе [6] построена неявная схема ATVDR, у которой вся добавка от реконструкции TVD взята с предыдущего шага.

Из теории разностных схем известно, что классические аппроксимации метода DS_n - неявные схемы St и DD безусловно устойчивы. Возникает вопрос: будут ли безусловно устойчивыми неявные схемы TVD и TVDR? В данной работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с использованием спектрального признака Неймана [7, 8]. Для сравнения приведены условия устойчивости схем St и TVD.

1 Разностная аппроксимация уравнения переноса

Рассмотрим решение линейного уравнение переноса в одномерной плоской геометрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \mu \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha J = 0, \quad (1)$$

где $J(\mu, x, t)$ – неотрицательная функция, μ – направляющий косинус в пространстве полета частиц, x – пространственная координата, t – время, c – скорость света, α – некоторая неотрицательная константа. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$J^0(\mu, x, t^0) = J^0(\mu, x), \quad J(\mu, x_L, t) \Big|_{\mu > 0} = J_L(\mu, t), \quad J(\mu, x_R, t) \Big|_{\mu < 0} = J_R(\mu, t).$$

Неявная схема в рамках одноячеечного шаблона для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (2)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, I$, $n = 0, \dots$.

Для упрощения изложения в дальнейшем предполагается $\tau = \text{const}$, $h = \text{const}$. Аппроксимация по μ не проводится, так как при исследовании устойчивости в плоской геометрии переменная μ рассматривается как параметр.

Величины с целыми индексами $J_i^{n+1} = J(\mu, x_i, t^{n+1})$ являются значениями искомой функции в узлах разностной сетки. Значения с полуцелыми индексами

$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J(\mu, x, t^{n+1}) dx$ являются интегральными средними величинами в ячейке и

отличаются от значений в центре ячейки $J(\mu, x_{i+1/2}, t^{n+1})$ на $O(h^m)$ в зависимости от используемой квадратуры, где m – порядок квадратурной формулы.

Уравнение (2) можно записать в более компактном виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad (3)$$

где $q = 1 + c\tau\alpha \geq 1$, $C = \frac{c\tau\mu}{h}$, $\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}$.

Схема с дополнительными соотношениями связи

$$J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0, \quad (4)$$

$$J_{i+1/2}^{n+1} = J_i^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0$$

является монотонной положительной схемой первого порядка аппроксимации. В теории переноса эта схема называется противопотоковой, а в методе DS_n – схемой St.

Подставляя соотношениями связи (4) в уравнение (3), получаем

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q+C} J_{i+1/2}^n + \frac{C}{q+C} J_{i-1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0, \quad (5)$$

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q-C} J_{i+1/2}^n - \frac{C}{q-C} J_{i+3/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0.$$

Рассмотренные в данной работе схемы TVD и TVDR построены на основе схемы St. Для повышения порядка аппроксимации схемы St проведем реконструкцию решения на сеточных интервалах. Представим интенсивность на интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ в кусочно-линейной форме

$$J(x, \mu, t) = J_{i+1/2} + \frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial x} (x - x_{i+1/2}), \quad x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1}).$$

Отсюда следуют реконструированные соотношения связи

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, \quad \mu > 0,$$

$$J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, \quad \mu < 0.$$

В соответствии с методологией TVD в качестве $\frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial x}$ берутся некоторые ограничители, которые обычно используют односторонние производные. Если ввести традиционные для схем TVD функции-ограничители, то можно записать соотношениями связи в виде

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \quad \mu > 0, \quad (6)$$

$$J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \quad \mu \leq 0,$$

где $\Delta J_{i-1/2} = J_{i+1/2} - J_{i-1/2}$, $\phi_{i+1/2} = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2})}{\Delta J_{i-1/2}} = L(1, \hat{\theta}_{i+1/2})$, $\hat{\theta}_{i+1/2} = \frac{\Delta J_{i+1/2}}{\Delta J_{i-1/2}}$, L -

некоторый ограничитель. При $\Delta J_{i-1/2} = 0$ полагаем $\phi_{i+1/2} = 1$, $\hat{\theta}_{i+1/2} = 1$. При $\text{sgn } \Delta J_{i-1/2} \neq \text{sgn } \Delta J_{i+1/2}$ полагаем $\hat{\theta}_{i+1/2} = 0$, поэтому выполняется $\hat{\theta}_{i+1/2} \geq 0$.

Система уравнений с соотношениями связи (6) представляет собой неявную схему TVD с четырехточечным шаблоном на $n+1$ слое:

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{(J_{i+1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}) - (J_{i-1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-3/2}^{n+1})}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0 \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{(J_{i+3/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+3/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1}) - (J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0 \quad \text{при } \mu \leq 0.$$

Для $\mu > 0$ уравнение переноса расписывается в четырех ячейках ($i-3/2, i-1/2, i+1/2, i+3/2$) (см. рис. 1):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} + 0.5L(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1}) - 0.5L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1}) \right] = J_{i+1/2}^n,$$

для $\mu \leq 0$ - в ячейках ($i-1/2, i+1/2, i+3/2, i+5/2$):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5L(\Delta J_{i+1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+3/2}^{n+1}) + 0.5L(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1}) \right] = J_{i+1/2}^n.$$

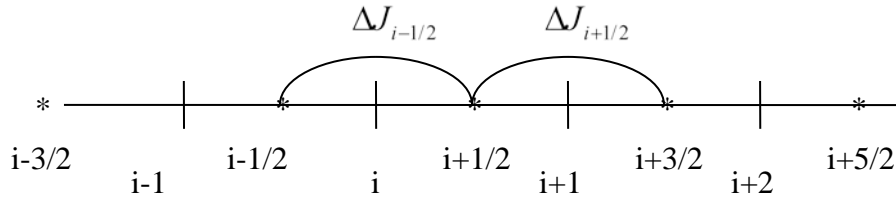


Рисунок 1 – Шаблон разностной схемы

Разностные уравнения можно записать в более компактном виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^{n+1} = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CH_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^{n+1} = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i+1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0,$$

где
$$\phi_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}, \quad \theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}, \quad \phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}.$$

При $\Delta J_{i-1/2} = 0$ полагаем $\phi_{i+1/2} = 1$ и $\theta_{i-1/2} = 1$.

Рассмотренные в работе схемы и аппроксимация при $\mu > 0$ собраны в таблице 1.

Таблица 1 - Аппроксимация уравнения переноса при $\mu > 0$

Схема	Аппроксимация при $\mu > 0$	Коэффициент схемы $A_{i-1/2}$
St	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	1
ЯТVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$
HTVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1}$
РТVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^n\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$

PTVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1}$
ATVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} + C[(A-1)\Delta J]_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n$
MTVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$\frac{(D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - (D^+)_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}$

Использование ограничителей с предыдущего шага в схемах TVDR может привести к появлению ограничений на шаг по времени. Основной задачей данного исследования является получение ограничений на шаг по времени и сравнение условий устойчивости рассматриваемых схем.

2 Исследование устойчивости по Нейману

Разностная схема устойчива, если на каждом шаге по времени ошибка не возрастает при переходе от одного временного шага к другому.

В точке $(x_{i+1/2}, t^{n+1})$ ошибка равна $\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} = J(x_{i+1/2}, t^{n+1}) - u(x_{i+1/2}, t^{n+1}) = J_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1}$,
отсюда $J_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} + \varepsilon_{i+1/2}^{n+1}$. Подставляя $J_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} + \varepsilon_{i+1/2}^{n+1}$ в разностную схему, получаем уравнение для ошибки ε .

Уравнения для ошибки в схеме St имеют вид

$$q\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta\varepsilon_{i-1/2}^{n+1} = \varepsilon_{i+1/2}^n \text{ при } \mu > 0,$$

$$q\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} = \varepsilon_{i+1/2}^n \text{ при } \mu \leq 0.$$

Представим ошибку ε на n -ом временном слое в виде гармоники с произвольным

волновым числом $k_m = \frac{2\pi m}{L}$: $\varepsilon^n(x) = e^{ik_m x}$. Тогда ошибка на $n+1$ -ом временном слое имеет вид $\varepsilon^{n+1}(x) = G\varepsilon^n(x) = Ge^{ik_m x}$, где G – множитель перехода. Условием устойчивости разностной схемы является соотношение $|G| \leq 1$.

На равномерной сетке при $h = \text{const}$, используя выражения для ошибки

$$\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}}, \quad \varepsilon_{i+1/2}^n = e^{ik_m x_{i+1/2}},$$

$$\varepsilon_{i-1/2}^{n+1} = Ge^{ik_m x_{i-1/2}} = Ge^{ik_m(x_{i+1/2}-h)} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}} e^{-ik_m h},$$

$$\varepsilon_{i-3/2}^{n+1} = Ge^{ik_m x_{i-3/2}} = Ge^{ik_m(x_{i+1/2}-2h)} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}} e^{-ik_m 2h},$$

$$\Delta\varepsilon_{i-1/2}^{n+1} = \varepsilon_{i+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i-1/2}^{n+1} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}} - Ge^{ik_m x_{i-1/2}} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}} (1 - e^{-ik_m h}),$$

$$\Delta \varepsilon_{i-3/2}^{n+1} = \varepsilon_{i-1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i-3/2}^{n+1} = Ge^{ik_m x_{i-1/2}} - Ge^{ik_m x_{i-3/2}} = Ge^{ik_m x_{i+1/2}} e^{-ik_m h} (1 - e^{-ik_m h}),$$

получаем при $\mu > 0$ в схеме St множитель перехода
$$G = \frac{1}{q + C(1 - e^{-ik_m h})}.$$

Используя соотношения $G = \frac{1}{a + bi}$, $a = q + C(1 - \cos k_m h)$, $b = C \sin k_m h$,

$$|G|^2 = \frac{1}{|a + bi|^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad e^{-ik_m h} = \cos k_m h - i \sin k_m h, \quad \text{из неравенства}$$

$$a^2 + b^2 = q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h) \geq 1 \quad \text{получаем условие устойчивости } |G| \leq 1.$$

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$:
$$G = \frac{1}{q - C(1 - e^{ik_m h})}.$$
 Из соотношения $a^2 + b^2 = q^2 - 2C(q - C)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ следует условие $|G| \leq 1$. Из полученных неравенств следует безусловная устойчивость схемы St для всех μ .

В явной TVD схеме из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем множитель перехода
$$G = \frac{1 - CA(1 - e^{-ik_m h})}{q}.$$
 Из условия $a^2 + b^2 = 1 - 2CA(1 - CA)(1 - \cos k_m h) \leq q^2$ для всех $0 \leq \alpha < \infty$ и любых k_m получаем условие устойчивости $A \leq C^{-1}$ или в виде условия на функции-ограничители $\phi_{i+1/2}^n \leq 2(C^{-1} - 1)$. Из условия положительности функций-ограничителей $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ получаем ограничение на число Куранта $C \leq 1$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$:
$$G = \frac{1 - CH(e^{ik_m h} - 1)}{q}.$$
 Из неравенства $a^2 + b^2 = 1 + 2CH(1 + CH)(1 - \cos k_m h) \leq q^2$ получаем условие устойчивости $H \leq -C^{-1}$ или $\phi_{i+3/2}^n \leq 2(-C^{-1} - 1)$, $-C \leq 1$.

Из этих неравенств видно, что устойчивость явной TVD схемы зависит от ограничения на число Куранта $|C| \leq 1$.

Из уравнения для ошибки в неявной TVD схеме при $\mu > 0$ получаем множитель перехода
$$G = \frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}.$$
 Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h) \geq 1$

получаем условие устойчивости $A \geq 0$ или в виде $2 + \phi_{i+1/2}^{n+1} \geq \phi_{i-1/2}^{n+1} \theta_{i-1/2}^{n+1}$. Из условия
положительности функций $\phi_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i-1/2}^{n+1} \leq 2\hat{\theta}_{i-1/2}^{n+1}$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q + CH(e^{ik_m h} - 1)}$. Из
неравенств $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ и $C \leq 0$ получаем условие
устойчивости $H \geq 0$ или в виде $2 + \phi_{i+1/2}^{n+1} \theta_{i+1/2}^{n+1} \geq \phi_{i+3/2}^{n+1}$. Из условий положительности функций
 $\phi_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$, $\theta_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i+3/2}^{n+1} \leq 2$.

Из этих неравенств видно, что устойчивость неявной TVD схемы при выборе
функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$ не зависит от ограничения на
число Куранта. Полученное условие на выбор функций-ограничителей справедливо при
любых коэффициентах поглощения $0 \leq \alpha < \infty$, но обязательным оно является только в
вакууме при $\alpha = 0$. В оптически плотных средах при $\alpha \gg 1$ неравенство
 $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$, из которого выводятся условия на выбор
функций-ограничителей, может выполняться даже при нарушении условия
 $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$.

Из уравнения для ошибки в RTVD схеме при $\mu > 0$ получаем $G = \frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$.
Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ получаем условие устойчивости
 $A \geq 0$ или в виде $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2\hat{\theta}_{i-1/2}$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q + CH(e^{ik_m h} - 1)}$. Из
неравенств $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ и $C \leq 0$ получаем условие
устойчивости $H \geq 0$ или в виде $2 + \phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \geq \phi_{i+3/2}^n$. Из условий положительности функций
 $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$, $\theta_{i+1/2}^n \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i+3/2}^n \leq 2$.

Из этих неравенств видно, что устойчивость полунеявной TVD схемы при выборе
функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$ не зависит от ограничения на

число Куранта и может выполняться при нарушении этого условия в оптически плотных средах.

Из уравнения для ошибки в PTVDR схеме при $\mu > 0$ получаем множитель перехода

$$G = \frac{1}{q + CA_1(1 - e^{-ik_m h})}, \quad A_1 = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n e^{-ik_m h}.$$

Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_3(1 - \cos k_m h) \geq 1$,

$$A_3 = (A_2 - 0.5\phi_{i-1/2}^n) \left[q + C(A_2 - 0.5\phi_{i-1/2}^n) \right] + CA_2\phi_{i-1/2}^n (1 + \cos k_m h)$$

получаем условие

$$\text{устойчивости } A_2 = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h \geq 0.5\phi_{i-1/2}^n \quad \text{или} \quad \phi_{i-1/2}^n \leq \frac{2}{3}.$$

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$:

$$G = \frac{1}{q + CH_1(e^{ik_m h} - 1)},$$

$$H_1 = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^n + 0.5\phi_{i+1/2}^n e^{-ik_m h}. \quad \text{Из неравенства } a^2 + b^2 = q^2 - 2CH_3(1 - \cos k_m h) \geq 1,$$

$$H_3 = (H_2 - 0.5\phi_{i+1/2}^n) \left[q - C(H_2 - 0.5\phi_{i+1/2}^n) \right] - CH_2\phi_{i+1/2}^n (1 + \cos k_m h) \geq 1$$

получаем условие

$$\text{устойчивости } H_2 = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^n \geq 0.5\phi_{i+1/2}^n \quad \text{или} \quad \phi_{i+1/2}^n + \phi_{i+3/2}^n \leq 2.$$

Из этих неравенств видно, что условия устойчивости полуявной TVDR схемы являются довольно жесткими, но их можно ослабить, если рассматривать задачи с ненулевым поглощением.

Из уравнения для ошибки в ATVDR схеме при $\mu > 0$ получаем

$$G = \frac{1 - C(A-1)(1 - e^{-ik_m h})}{q + C(1 - e^{-ik_m h})} = \frac{a_1 + b_1 i}{a + b i}, \quad \text{где } a_1 = 1 - C(A-1)(1 - \cos k_m h), \quad b_1 = -C(A-1) \sin k_m h,$$

$$a = q + C(1 - \cos k_m h), \quad b = C \sin k_m h.$$

Из неравенства $a_1^2 + b_1^2 = 1 - 2C(A-1)(1 - C(A-1))(1 - \cos k_m h) \leq a^2 + b^2$,

$$a^2 + b^2 = q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)$$

получаем условие устойчивости

$$q^2 + 2CA_5(1 - \cos k_m h) \geq 1, \quad \text{которое выполняется при } A_5 = q + C + (A-1)(1 - C(A-1)) \geq 0 \quad \text{или}$$

$$1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4C(q + C)}}{2C} \leq A \leq 1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4C(q + C)}}{2C}.$$

Учитывая, что $A_{i-1/2}^{n+1} = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1}$, получаем условия на функции-

$$0 \leq \phi_{i-1/2}^n \leq \frac{\sqrt{1+4C(q+C)}-1}{C} \hat{\theta}_{i-1/2}^n, \quad 0 \leq \phi_{i+1/2}^n \leq \frac{1+\sqrt{1+4C(q+C)}}{C}.$$

ограничители

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$:

$$G = \frac{1-C(H-1)(e^{ik_m h} - 1)}{q+C(e^{ik_m h} - 1)} = \frac{a_1 + b_1 i}{a + bi}, \quad \text{где } a_1 = 1 + C(H-1)(1 - \cos k_m h), \quad b_1 = -C(H-1) \sin k_m h$$

$$, \quad a = q - C(1 - \cos k_m h), \quad b = C \sin k_m h.$$

Из неравенства $a_1^2 + b_1^2 = 1 + 2C(H-1)(1+C(H-1))(1 - \cos k_m h) \leq a^2 + b^2$,

$a^2 + b^2 = q^2 - 2C(q-C)(1 - \cos k_m h)$ получаем условие устойчивости

$$q^2 - 2C(1 - \cos k_m h) [q - C + (H-1)(1 + C(H-1))] \geq 1, \quad \text{которое выполняется при}$$

$$q - C + (H-1)(1 + C(H-1)) \geq 0 \quad \text{или} \quad 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4C(q-C)}}{2C} \leq H \leq 1 - \frac{1 + \sqrt{1 - 4C(q-C)}}{2C}.$$

Учитывая, что $H = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^n + 0.5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n$, получаем условия на функции-ограничители

$$0 \leq \phi_{i+1/2}^n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4|C|(q+|C|)}}{|C|} \hat{\theta}_{i+1/2}^n, \quad 0 \leq \phi_{i+3/2}^n \leq \frac{\sqrt{1 + 4|C|(q+|C|)} - 1}{|C|}.$$

Из этих неравенств видно, что устойчивость ATVDR схемы зависит от числа Куранта.

Из уравнения для ошибки в MTVDR схеме при $\mu > 0$ получаем множитель

$$\text{перехода } G = \left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n e^{-ik_m h} \right] \right\}^{-1}.$$

Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_6 \geq 1$, где

$$A_6 = q \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \cos k_m h \right] + 0.5C \left[(D^+)_{i+1/2}^2 - 2(D^+)_{i+1/2} (D^+)_{i-1/2} \cos k_m h + (D^+)_{i-1/2}^2 \right],$$

учитывая $-2(D^+)_{i+1/2} (D^+)_{i-1/2} \cos k_m h \geq -2(D^+)_{i+1/2} (D^+)_{i-1/2}$, $-(D^+)_{i-1/2}^2 \cos k_m h \geq -(D^+)_{i-1/2}^2$,

$$\text{получаем } a^2 + b^2 \geq A_8, \quad \text{где } A_8 = \left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \right] \right\}^2.$$

При выполнении неравенства $A_8 \geq 1$ выполняется условие $a^2 + b^2 \geq 1$. Неравенство $A_8 \geq 1$

выполняется при $\alpha h \geq \mu \left[(D^+)_{i-1/2}^n - (D^+)_{i+1/2}^n \right]$ или $D^+ \leq \alpha h$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$:

$$G = \left\{ q + C \left[(D^-)_{i+3/2}^n e^{ik_m h} - (D^-)_{i+1/2}^n \right] \right\}^{-1} . \text{ Условие } a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_7 \geq 1 ,$$

$$A_7 = q \left[(D^-)_{i+3/2}^n \cos k_m h - (D^-)_{i+1/2}^n \right] + 0.5C \left[(D^-)_{i+3/2}^2 - 2(D^-)_{i+1/2} (D^-)_{i+3/2} \cos k_m h + (D^-)_{i+1/2}^2 \right]$$

выполняется при $\alpha h \geq |\mu| \left[(D^-)_{i+1/2}^n - (D^-)_{i+3/2}^n \right]$ или $D^- \leq \alpha h$.

В оптически прозрачных средах при $\alpha h \rightarrow 0$ условие устойчивости для MTVDR схемы $D^\pm \leq \alpha h$ является довольно жестким.

Вид множителя перехода G и его модуля для рассмотренных схем при $\mu > 0$ собраны для наглядности в таблице 2.

Таблица 2 - Множитель перехода G и его модуль при $\mu > 0$

Схема	Множитель перехода G	G
St	$\frac{1}{q + C(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
ЯТVD	$\frac{1 - CA(1 - e^{-ik_m h})}{q}$	$\frac{\sqrt{1 - 2CA(1 - CA)(1 - \cos k_m h)}}{q}$
HTVD	$\frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVD	$\frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVDR	$\frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_3(1 - \cos k_m h)}}$
ATVDR	$\frac{1 - C(1 - e^{-ik_m h})(A - 1)}{q + C(1 - e^{-ik_m h})}$	$\sqrt{\frac{1 - 2C(A - 1)(1 - C(A - 1))(1 - \cos k_m h)}{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
MTVDR	$\left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n e^{-ik_m h} \right] \right\}^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_6}}$

В таблице 2 коэффициенты схем А берутся из таблицы 1,

$$A_2 = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h \geq 0.5\phi_{i-1/2}^n ,$$

$$A_3 = (A_2 - 0.5\phi_{i-1/2}^n) \left[q + C(A_2 - 0.5\phi_{i-1/2}^n) \right] + CA_2 \phi_{i-1/2}^n (1 + \cos k_m h) ,$$

$$A_6 = q \left[\left(D^+ \right)_{i+1/2}^n - \left(D^+ \right)_{i-1/2}^n \cos k_m h \right] + 0.5C \left[\left(D^+ \right)_{i+1/2}^2 - 2 \left(D^+ \right)_{i+1/2} \left(D^+ \right)_{i-1/2} \cos k_m h + \left(D^+ \right)_{i-1/2}^2 \right].$$

Из таблицы 2 видно, что максимумы модулей множителей перехода G во всех схемах при неотрицательных коэффициентах схем A, A_3, A_6 одинаковый и равен q^{-1} .

Наиболее простой вид модуль множителя перехода принимает в случае постоянного решения при $J = \text{const}$. В этом случае получаем $A = \theta = \phi = D^\pm = 1$. Вид модуля множителя перехода в частном случае $J = \text{const}$ и условия на функции-ограничители в общем случае для рассмотренных схем при $\mu > 0$ собраны в таблице 3.

Таблица 3 - Условия устойчивости и модуль множителя G при $J = \text{const}$

Схема	Условия устойчивости	Условия на функцию-ограничитель	$ G $ при $J = \text{const}$
St	нет	нет	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q+C)(1 - \cos k_m h)}}$
ЯТВД	$0 \leq A \leq C^{-1}$	$0 \leq \phi \leq 2(C^{-1} - 1), C \leq 1$	$\frac{\sqrt{1 - 2C(1-C)(1 - \cos k_m h)}}{q}$
НТВД	$A \geq 0$	$0 \leq \phi \leq 2 \min(1, \hat{\theta})$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q+C)(1 - \cos k_m h)}}$
РТВД	$A \geq 0$	$0 \leq \phi \leq 2 \min(1, \hat{\theta})$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q+C)(1 - \cos k_m h)}}$
РТВДР	$A_2 \geq 0.5\phi$	$\phi \leq \frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_2(1 - \cos k_m h)}}$
АТВДР	$A_5 \geq 0$	$0 \leq \phi \leq \frac{\sqrt{1 + 4 C (q + C)} - 1}{ C }$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q+C)(1 - \cos k_m h)}}$
МТВДР	$A_8 \geq 1$	$0 \leq D^\pm \leq \alpha h$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q+C)(1 - \cos k_m h)}}$

В таблице 3 коэффициенты схем A берутся из таблицы 1,

$$A_2 = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h \geq 0.5\phi_{i-1/2}^n,$$

$$A_3 = (1 - \cos k_m h) [q + C(1 - \cos k_m h)] + C(1.5 - \cos k_m h)(1 + \cos k_m h),$$

$$A_5 = q + C + (A - 1)(1 - C(A - 1)), \quad A_8 = \left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \right] \right\}^2.$$

Заключение

В данной работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с помощью спектрального признака Неймана для одномерного уравнения переноса. Для сравнения приведены условия устойчивости схем St и TVD. Для схем TVD и TVDR получены следующие результаты:

- 1) устойчивость явной схемы TVD зависит от ограничения на число Куранта $|C| < 1$;
- 2) устойчивость неявной и полунеявной схем TVD при выборе функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$ не зависит от числа Куранта и в оптически плотных средах может быть ослаблено.
- 3) условие устойчивости полунеявной схемы TVDR является наиболее жестким среди рассмотренных схем, но его можно ослабить в оптически плотных средах;
- 4) устойчивость схемы ATVDR зависит от числа Куранта;
- 5) выбор функций-ограничителей схемы MTVDR с сохранением устойчивости зависит от оптической прозрачности среды.

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) условия устойчивости для неявной и полунеявной TVD схем не зависят от числа Куранта, но накладывают требования на выбор ограничителей;
- 2) условия устойчивости для неявных и полунеявной TVDR схем накладывают требования на выбор ограничителей и зависят от числа Куранта, что плохо для неявных схем, т.к. приводит к ограничениям временного шага.

Следует заметить, что полученные условия на выбор функций-ограничителей справедливы при любых коэффициентах поглощения $0 \leq \alpha < \infty$, но обязательными они являются только в вакууме при $\alpha = 0$. В оптически плотных средах при $\alpha \gg 1$ устойчивость TVDR схем может выполняться даже при нарушении этих условий.

Список использованных источников

- ¹ В.П. Колган. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. Уч. Зап. ЦАГИ, №6, С. 68-77, 1972.
- ² A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. J. Comput. Phys., 49:357-393, 1983.
- ³ Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов. В кн.: Теория ядерных реакторов. - М.: Атомиздат, 1963. С. 243-258.
- ⁴ Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS_n методу решения уравнения переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2009. Вып. 2. С.37-48.
- ⁵ Шестаков А.А. TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2019. Вып. 2. С.17-36.
- ⁶ Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с TVD - реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2013. Вып. 3. С.3-15.
- ⁷ Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 1986.
- ⁸ Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1973.