

Аналитические тесты для исследования корректирующих коэффициентов метода квазипереноса

А.А. Шестаков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академика Е.И. Забабахина», г.Снежинск

При решении системы уравнений переноса теплового излучения (СУПТИ) применяют различные упрощающие приближения, сводящие задачу переноса излучения к более простой. Большая часть этих приближений не использует решение кинетического уравнения, но некоторые из них используют решение кинетического уравнения для получения вспомогательных осредненных коэффициентов, которые называются корректирующими. Приближения, которые не используют решение кинетического уравнения, дешевле по времени счета и объему занимаемой памяти ЭВМ, но имеют ограничения по областям применения. Приближения, которые используют решение кинетического уравнения, дороже и сложнее в реализации, но не имеют ограничений по областям применения. К таким приближениям относятся, в первую очередь, квазидиффузионное приближение (КД), предложенное В.Я. Гольдиным в 1964 году [1], и квазипереносные приближения (КП), предложенные Н.Г. Карлыхановым и М.Ю. Козмановым в 2010 году [2]. Эти приближения получили дальнейшее развитие, в частности, в работах [3], [4], [5], [6], [7], [8].

При построении КД и КП приближений решение СУПТИ разбивается на два этапа. На первом этапе в этих приближениях решается кинетическое уравнение для получения корректирующих коэффициентов. На втором этапе решается квазидиффузионное или диффузионное уравнения для получения основных величин: температуры, плотности и потока излучения. В этих приближениях при решении задач СУПТИ приходится применять итерационные процессы по нелинейности коэффициента поглощения, внутренней энергии вещества, функции Планка, расщеплению многомерных уравнений. Замечательным свойством КД и КП приближений является то, что в них не требуется согласованность схем на этапах, и вся тяжесть итерационных процессов переносится на второй, более простой этап, который считается с корректирующими коэффициентами, при этом кинетическое уравнение обычно решается один раз на временном шаге.

Приближение КП сводит численное решение кинетического уравнения к решению диффузионного уравнения через введение корректирующих коэффициентов. Переход к диффузионному уравнению упрощает численное решение кинетического уравнения и дает возможность использовать монотонные схемы второго порядка точности при решении задач переноса теплового излучения. При этом очень важно знать, как ведут себя эти коэффициенты. Потому что для корректности диффузионного уравнения обязательным является требование положительности коэффициента диффузии. При отрицательных корректирующих коэффициентах решение становится неустойчивым. Наиболее просто исследовать поведение корректирующих коэффициентов в задачах, имеющих точные решения, так как в этом случае коэффициенты вычисляются аналитически. Задачи переноса излучения можно условно разбить на три группы: перенос излучения в оптически плотных средах, в оптически прозрачных средах и задачи, включающие комбинации из оптически плотных и прозрачных сред. Для первой группы задач через асимптотическое разложение будет показано, что корректирующие коэффициенты не отрицательны в этих задачах. Для второй и третьей групп в общем случае это показать не удастся, поэтому для них будут рассмотрены три задачи, имеющие точные решения.

Первая задача, взятая для исследований из работы [9], имеет стационарное решение в вакууме. Вторая задача имеет в вакууме нестационарное решение. Обе задачи описывают перенос излучения в сферически-симметричной геометрии.

Третья задача описывает прохождение излучения через оптически плотную и прозрачную среды [10] и имеет точное решение на стационаре в плоской геометрии [11].

1. Постановка задачи

На первом этапе в КД и КП приближениях решается кинетическое уравнение для получения корректирующих коэффициентов. В сферически-симметричном и плоском случаях без учета движения среды для изотропного рассеяния кинетическое уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} + \bar{\Omega} \nabla J_\nu + \alpha_\nu J_\nu = \frac{1}{2} \alpha_{cv} B_\nu + \frac{1}{2} \alpha_{sv} U_\nu \quad (1.1)$$

Здесь $J_\nu(r, \mu, \nu, t)$ – спектральная интенсивность излучения, умноженная на 2π , c – скорость света, r – пространственная координата, t – время, ν – частота фотонов, μ – косинус угла между направлением полёта фотона $\bar{\Omega}$ и осью r , $\alpha_\nu = \alpha_{cv} + \alpha_{sv}$ – коэффициент ослабления, α_{cv} – коэффициент поглощения, α_{sv} – коэффициент рассеяния, $B_\nu(\nu, T)$ – плотность равновесного излучения, умноженная на c ,

$U_\nu = \int_{-1}^1 J_\nu d\mu$ – спектральная плотность энергии излучения, $T(r, t)$ – температура среды,

$\bar{\Omega} \nabla J_\nu = \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta J_\nu) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) J_\nu)$, η – параметр геометрии (0 – плоская, 2 – сферически-симметричная).

На втором этапе в КД приближении решается система:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{1}{r^\eta} \frac{\partial (r^\eta S_\nu)}{\partial r} + \alpha_{cv} U_\nu &= \alpha_{cv} B_\nu, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial S_\nu}{\partial t} + \frac{\partial D_\nu U_\nu}{\partial r} + \frac{\eta}{2} \frac{3D_\nu - 1}{r} U_\nu + \alpha_\nu S_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $S_\nu = \int_{-1}^1 \mu J_\nu d\mu$ – спектральный поток излучения, $D_\nu = \left(\int_{-1}^1 J_\nu d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu^2 J_\nu d\mu$ – коэффициент КД.

В работе [2] для КП приближения предложено два варианта. В первом варианте решается система:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{1}{r^\eta} \frac{\partial (r^\eta S_\nu)}{\partial r} + \alpha_{cv} U_\nu &= \alpha_{cv} B_\nu, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial r} + (\alpha_{sv} + \alpha_{cv} + \alpha_{kv}) S_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\alpha_{kv} = \left(\int_{-1}^1 \mu J_\nu d\mu \right)^{-1} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-1}^1 \mu J_\nu d\mu \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(D_\nu - \frac{1}{3} \right) \int_{-1}^1 J_\nu d\mu \right] + \frac{\eta}{2r} (3D_\nu - 1) \int_{-1}^1 J_\nu d\mu \right]$ – корректирующий коэффициент.

Во втором варианте решается система:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{1}{r^\eta} \frac{\partial (r^\eta S_\nu)}{\partial r} + \alpha_{cv} U_\nu &= \alpha_{cv} B_\nu, \\ \frac{m_\nu}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial r} + \alpha_\nu S_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где
$$m_v = - \left(\frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-1}^1 J_v d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu J_v d\mu$$
 - корректирующий коэффициент.

Недостатком первого варианта КП приближения является необходимость вычислять коэффициенты КД, которые в многомерной геометрии имеют сложный тензорный вид. Этого можно избежать, если доказать эквивалентность первого и второго вариантов КП приближения, так как во втором варианте для определения корректирующего коэффициента достаточно знать плотность и поток излучения.

Для доказательства эквивалентности первого и второго вариантов КП приближения запишем корректирующий коэффициент α_{kv} в виде

$$\alpha_{kv} = S_v^{-1} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial S_v}{\partial t} + \frac{\partial D_v U_v}{\partial r} + \frac{\eta}{2} \frac{3D_v - 1}{r} U_v + \alpha_v S_v \right) - \left(\frac{1}{3} \frac{\partial U_v}{\partial r} + \alpha_v S_v \right) \right] = \alpha_v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right). \quad (1.5)$$

Здесь использовано равенство нулю первого слагаемого, совпадающего со вторым уравнением системы (1.2).

Подставляя выражение (1.5) во второе уравнение системы (1.3), получаем второе уравнение системы (1.4). Эквивалентность первого и второго вариантов КП приближения доказана. При этом использование выражения (1.5) для получения корректирующего коэффициента α_{kv} не требует вычисления коэффициентов КД. В вакууме при $\alpha_v = 0$

$$\alpha_{kv} = - \frac{1}{3S_v} \frac{\partial U_v}{\partial r}.$$

получаем

Совместно с уравнениями в КД и КП приближениях решается уравнение энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \alpha_{cv} (U_v - B_v) dv,$$

где E – внутренняя энергия вещества.

2. Асимптотическое представление корректирующих коэффициентов в КД и КП приближениях

Следуя работе [12], точное значение интенсивности в плоском стационарном случае оптически плотных сред можно записать в виде бесконечного ряда

$$J_v = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\bar{\Omega}, \alpha_v^{-1} \nabla)^n B_v = \frac{1}{2} \left\{ B_v - \frac{\mu}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) - \frac{\mu^3}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] + \dots \right\}.$$

Для плотности, потока и давления излучения точное решение имеет вид

$$U_v = \int_{-1}^1 J_v d\mu = B_v + \frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \frac{1}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] \right\} + \dots = B_v - \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial S_v}{\partial r},$$

$$S_v = \int_{-1}^1 \mu J_v d\mu = - \frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} - \frac{1}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] - \dots = - \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial P_v}{\partial r},$$

$$P_v = \int_{-1}^1 \mu^2 J_v d\mu = \frac{1}{3} B_v + \frac{1}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \frac{1}{7\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] \right\} + \dots$$

При $\alpha_v = const$ можно получить следующие зависимости этих величин от спектрального пробега излучения $l_v = \alpha_v^{-1}$:

$$J_v = \frac{1}{2} B_v + O(l_v), \quad U_v = B_v + O_1(l_v^2),$$

$$S_v = -\frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} + O_2(l_v^3), \quad P_v = \frac{1}{3}B_v + O_3(l_v^2).$$

Из этих формул видно, что при $\alpha_v \rightarrow \infty$ получаем условия локального термодинамического равновесия: $J_v \rightarrow \frac{1}{2}B_v$, $U_v \rightarrow B_v$, $S_v \rightarrow 0$, $P_v \rightarrow \frac{1}{3}B_v$.

Для коэффициентов КД и КП получаем

$$D_v = \frac{P_v}{U_v} = \frac{1}{3} \frac{B_v + \frac{3}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \frac{3}{7\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] \right\} + \dots}{B_v + \frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \frac{1}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) \right] \right\} + \dots} = \frac{1}{3} + O_4(\alpha_v^{-2}) \quad (2.1)$$

$$m_v = -\frac{S_v}{\frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial U_v}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial P_v}{\partial r}}{\frac{\partial U_v}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial P_v}{\partial r}}{\frac{\partial B_v}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial S_v}{\partial r} \right)} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left\{ B_v + \frac{3}{5\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \dots \right\}}{\frac{\partial}{\partial r} \left\{ B_v + \frac{1}{3\alpha_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) + \dots \right\}} = 1 + O_5(\alpha_v^{-2}) \quad (2.2)$$

$$\alpha_{vk} = \alpha_v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) = O_6(\alpha_v^{-1}). \quad (2.3)$$

Из этих формул видно, что при $\alpha_v \rightarrow \infty$ получаем $D_v \rightarrow 1/3$, $m_v \rightarrow 1$, $\alpha_{vk} \rightarrow 0$. Таким образом, коэффициенты D_v и m_v стремятся к постоянным положительным значениям, а порядок сходимости этих коэффициентов совпадает с порядком сходимости U_v и P_v к равновесным величинам. Порядок сходимости коэффициента α_{vk} ниже и совпадает с порядком сходимости J_v и S_v к равновесным значениям. То есть, в оптически плотных средах решение кинетического уравнения стремится к решению диффузионного уравнения.

Полученные зависимости справедливы для всех решений уравнения переноса в случае оптически плотных сред. Рассмотрим поведение корректирующих коэффициентов в оптически прозрачных средах.

3. Сравнение коэффициентов в КД и КП приближениях на аналитических решениях

В КП приближении при вычислении корректирующего коэффициента m_v возникает особенность в оптически прозрачных средах при $\alpha_v \rightarrow 0$. Если в этом случае

второе уравнение системы (1.4) записать в виде закона Фика $S_v = -\chi_v \frac{\partial U_v}{\partial r}$, где

$$\chi_v = \frac{m_v}{3\alpha_v} = -\left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{-1}^1 J_v d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu J_v d\mu$$

, то можно заметить, что коэффициент χ_v не зависит от α_v . Тогда в оптически прозрачных средах при $\alpha_v = 0$ в системе (1.4) можно

пользоваться формулой $S_v = -\chi_v \frac{\partial U_v}{\partial r}$ вместо второго уравнения системы (1.4). В

$$\chi_{dif,v} = \frac{1}{3\alpha_v}$$

отличие от диффузионного приближения, где коэффициент диффузии стремится к бесконечности при $\alpha_v \rightarrow 0$, в КП приближении этого не происходит. Из условия корректности диффузионных уравнений на коэффициент χ_v накладывается требование положительности. Возникает вопрос, как часто оно может нарушаться при $\alpha_v = 0$? Для этого в данной работе рассмотрено поведение коэффициента χ_v в вакууме на двух задачах, имеющих аналитические решения. Проведено также сравнение корректирующих коэффициентов в системах (1.2), (1.3) в реальной среде, состоящей из оптически плотных и прозрачных веществ.

Задача 1

Первая задача описывает перенос излучения в вакууме от сферы радиуса r_L с постоянным граничным условием $J(r_L, \mu) = I_L = const$ для выходящих фотонов и имеет точное решение вида:

$$J(r, \mu) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \mu < 0, \\ 0, & 0 \leq \mu < \mu_0(r), \mu_0^2 = 1 - \frac{r_L^2}{r^2}, \mu_0(r_L) = 0, \\ I_L, & \mu_0(r) \leq \mu \leq 1, \end{cases}$$

$$U(r) = I_L \int_{\mu_0}^1 d\mu = I_L(1 - \mu_0)$$

$$S(r) = I_L \int_{\mu_0}^1 \mu d\mu = \frac{I_L}{2}(1 - \mu_0^2), \quad 0 \leq \mu_0 \leq 1.$$

Отсюда получаем корректирующие коэффициенты в КД и КП приближениях:

$$D(r) = \left(I_L \int_{\mu_0}^1 d\mu \right)^{-1} I_L \int_{\mu_0}^1 \mu^2 d\mu = \frac{1 - \mu_0^3}{3(1 - \mu_0)} = \frac{1}{3}(1 + \mu_0 + \mu_0^2) = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{r_L^2}{r^2} + \sqrt{1 - \frac{r_L^2}{r^2}} \right),$$

$$\chi = - \left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{-1}^1 J d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^1 \mu J d\mu = - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^{-1} S = \frac{r\mu_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - r_L^2}, \quad \alpha_k = \frac{1}{3\chi}. \quad (3.1)$$

Из этих формул следует, что в данной задаче выполняются условия положительности

$$\text{коэффициентов: } \frac{1}{3} \leq D \leq 1, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \chi \geq 0.$$

На рис.3.1 приведены профили коэффициентов КД и КП при $r_L = 1$ см, $1 \text{ см} \leq r \leq 2 \text{ см}$.

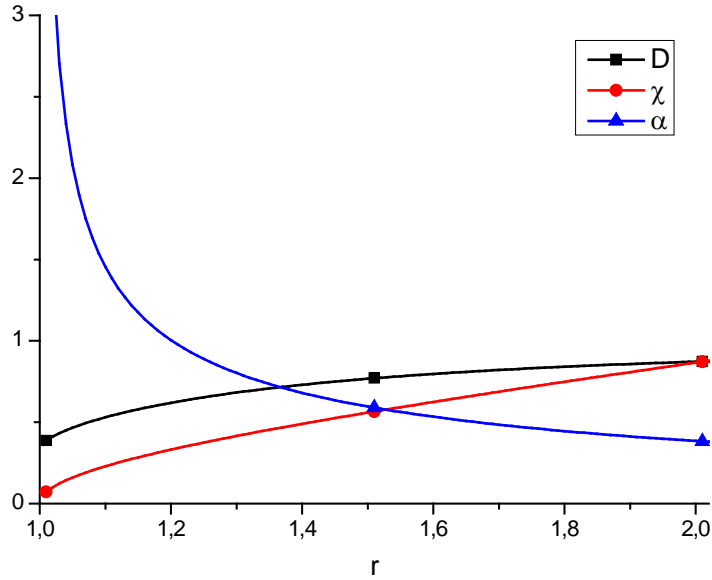


Рисунок 3.1 - Профили коэффициентов КД и КП.

Из рисунка видно, что коэффициенты КД и КП являются непрерывными, положительными и монотонными функциями от r . При $r \rightarrow r_L$ получаем $D \rightarrow 1/3$, $\chi \rightarrow 0$, $\alpha_k \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow \infty$ получаем $D \rightarrow 1$, $\chi \rightarrow \infty$, $\alpha_k \rightarrow 0$.

Задача 2

Вторая задача описывает поведение коэффициентов КД и КП в нестационарном случае. Задача описывает остывание в вакууме фотонного шара радиуса r_0 с постоянным

$$J = \frac{U_0}{4\pi}$$

начальным распределением $\frac{U_0}{4\pi}$. В результате остывания фотонного шара в центре со временем появляется вакуумный шар, который расширяется со скоростью света:

$$J(r, t, \omega) = \begin{cases} \frac{U_0}{4\pi} & \text{в телесном угле } \Delta\omega(r, t), \\ 0 & \text{вне угла } \Delta\omega(r, t), \end{cases} \quad \Delta\omega = 2\pi(1 - \mu_0) = \pi \frac{r_0^2 - (r - ct)^2}{rct}, \quad U(r, t) = \frac{\Delta\omega}{4\pi} U_0.$$

В осесимметричной и сферически-симметричной геометриях можно не учитывать распределение по углу $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и рассматривать начальное распределение в виде

$J(t=0, r) = I_L = \frac{U_0}{2}$ для системы (1.1). В сферически-симметричном случае точное решение можно записать в виде:

$$J(r, t, \mu) = \begin{cases} I_L & \text{при } \mu_0 < \mu < 1, \\ 0 & \text{при } -1 < \mu < \mu_0, \end{cases} \quad \mu_0 = -\frac{r_0^2 - r^2 - c^2 t^2}{2rct}, \quad -1 \leq \mu_0 \leq 1,$$

Для $ct < r_0$ получаем

$$U(r, t) = \frac{U_0}{2} \begin{cases} 2 & \text{при } 0 < ct < r_0 - r, \\ 1 - \mu_0 & \text{при } r_0 - r \leq ct < r_0 + r, \\ 0 & \text{при } ct \geq r_0 + r, \end{cases}$$

для $ct \geq r_0$ получаем

$$U(r, t) = \frac{U_0}{2} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < ct < r - r_0, \\ 1 - \mu_0 & \text{при } r - r_0 \leq ct < r_0 + r, \\ 0 & \text{при } ct \geq r_0 + r, \end{cases}$$

$$S(r,t) = \frac{U_0}{4} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < ct < r - r_0, \\ 1 - \mu_0^2 & \text{при } r - r_0 \leq ct < r_0 + r, \\ 0 & \text{при } ct \geq r_0 + r. \end{cases}$$

Решение данной задачи проиллюстрировано в фазовой плоскости (r,t) на рис.3.2, откуда видно, что вся область (r,t) разбивается на четыре подобласти.

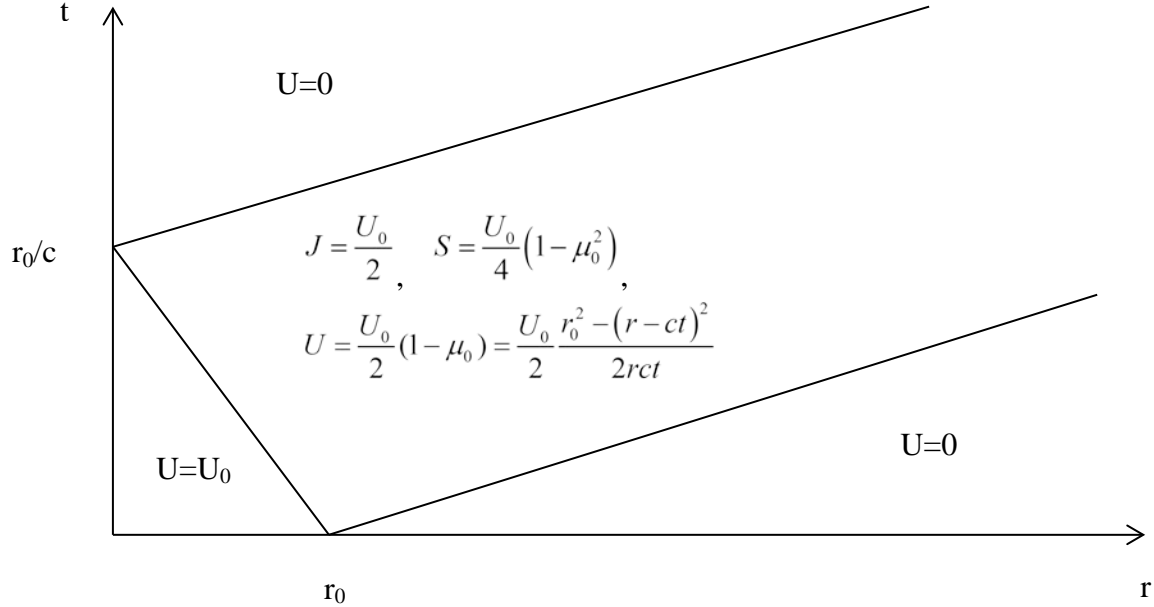


Рис.3.2 Решение в фазовой плоскости (r,t)

В данной задаче есть области, в которых при вычислении коэффициентов КД и КП возникают неопределенности типа 0/0. Анализ поведения коэффициентов КД и КП в пограничных точках помогает выбрать их значения так, чтобы сохранить непрерывность этих величин в таких ситуациях. К сожалению, это не удастся сделать только для коэффициента α_k , который неограниченно растёт у границ подобластей. Поэтому во избежание бесконечно больших значений α_k при численных расчетах можно из выражения (3.1) полагать $\alpha_k = 1/3\chi_{\min}$, где минимальное положительное значение коэффициента χ_{\min} можно выбирать с точностью до 'машинного нуля'.

С учетом этих предположений коэффициенты КД и КП имеют вид

$$D(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } ct < r_0 - r, \\ D_0 & \text{при } r_0 - r \leq ct < r_0 + r, \\ 1 & \text{при } ct \geq r_0 + r. \end{cases} \quad D_0 = \frac{1}{3} \frac{1 - \mu_0^3}{1 - \mu_0} = \frac{1}{3} (1 + \mu_0 + \mu_0^2),$$

$$\alpha_k = \frac{1}{3\chi}, \quad \chi = -\frac{S}{\partial U} = \begin{cases} \chi_{\min} & \text{при } 0 < ct \leq r - r_0, \\ \chi_0 & \text{при } r - r_0 < ct < r_0 + r, \\ \chi_{\min} & \text{при } ct \geq r_0 + r, \end{cases}$$

$$\chi_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{2} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial r} \right)^{-1} = \frac{1 - \mu_0^2}{2} \left(\frac{1}{ct} - \frac{\mu_0}{r} \right)^{-1} = \frac{r (2rct)^2 - (r_0^2 - r^2 - c^2 t^2)^2}{4 (r_0^2 + r^2 - c^2 t^2)}$$

Из этих формул видно, что $\frac{1}{3} \leq D \leq 1$, $\alpha_k > 0$, $\chi > 0$. Коэффициент χ_0 всегда неотрицателен при $ct \leq \frac{r}{|\mu_0|}$, то есть на интервале $r - r_0 \leq ct < r_0 + r$ выполняется $\chi_0 \geq 0$. На рис.3.3 приведены профили коэффициентов КД и КП на один из моментов времени при $ct=1\text{см}$, $r_0=2\text{см}$.

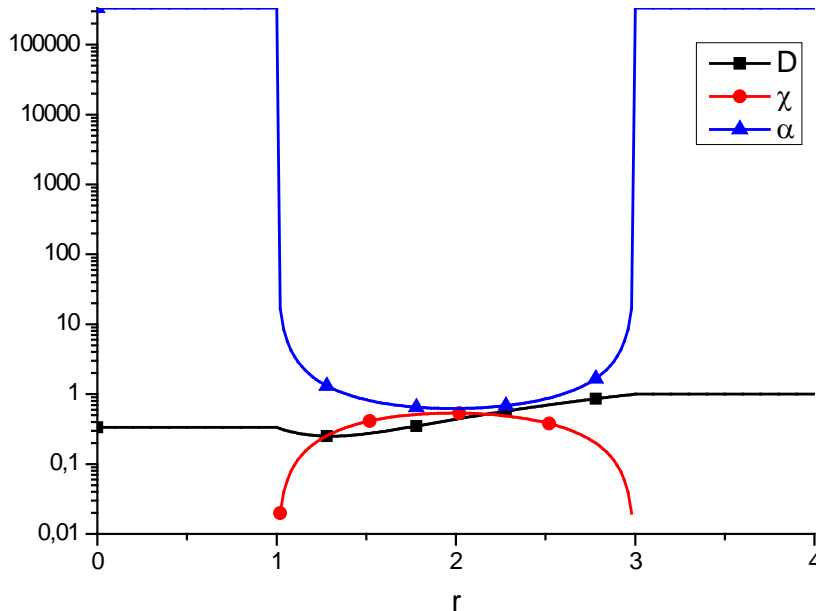


Рис.3.3 Профили коэффициентов КД и КП в логарифмическом масштабе

Из рисунка видно, что при данных предположениях коэффициент α_k всегда положительный и ограниченный, так как вне интервала $1 < r < 3$ ($r_0 - r < ct < r_0 + r$) коэффициент α_k полагается равным $1/3\chi_{\min}$. Коэффициент D положительный, непрерывный, но немонотонный и лежит в интервале $[0.29, 1]$. Коэффициент χ положительный, непрерывный и лежит в интервале $[0, 1]$.

Задача 3

Рассматривается перенос излучения в слое $r_0 < r < r_1$, $r_0=100\text{см}$, $r_1=104\text{см}$. На радиусе r_0 задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на радиусе r_1 – условие свободной поверхности. Коэффициенты поглощения и рассеяния берутся в виде:

$$\alpha_{sv} = 0, \alpha_{cv} = \kappa_v, \text{ где } \kappa_v = \frac{\kappa_0 h^3 (1 - e^{-hv/T})}{v^3}, \kappa_0 = \begin{cases} 10000, & 102 \leq r \leq 102.4, \\ 27, & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

Из работы [11] следует, что температура для данной задачи в плоской геометрии

$$\text{имеет вид } T = \sqrt[3]{T_1 - T_0(r - r_0)},$$

где $T_1=1$, $T_0=0.00659$ при $r-r_0 < 2$ см;

$T_1=5.8683$, $T_0=2.44$ при $2 \text{ см} \leq r-r_0 \leq 2.4$ см;

$T_1=0.02636$, $T_0=0.00659$ при $2.4 \text{ см} < r-r_0 < 4$ см.

Это решение в плоской геометрии на достаточно большом радиусе ($r > 100$ см) можно использовать и для сферически-симметричных задач. Для корректирующих коэффициентов из формул (2.1) – (2.3) с учетом первых двух членов при разложениях в ряды получаем

$$D_v = \frac{P_v}{U_v} \approx \frac{1}{3} \frac{B_v + \frac{3}{5} N_v}{B_v + \frac{1}{3} N_v} = \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{3}{5\kappa_v^4} N_{1v}}{1 + \frac{1}{3\kappa_v^4} N_{1v}}$$

$$m_v = -\frac{S_v}{\frac{1}{3\kappa_v} \frac{\partial U_v}{\partial r}} \approx \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left\{ B_v + \frac{3}{5} N_v \right\}}{\frac{\partial}{\partial r} \left\{ B_v + \frac{1}{3} N_v \right\}} = \frac{1 - \frac{3}{5\kappa_v^4} N_{2v}}{1 - \frac{1}{3\kappa_v^4} N_{2v}}$$

$$\alpha_{vk} = \kappa_v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) \approx \frac{4}{3\kappa_v^3} \frac{N_{2v}}{5 - 3\kappa_v^{-4} N_{2v}}$$

$$\text{где } N_v = \frac{1}{\kappa_v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_v} \frac{\partial B_v}{\partial r} \right) = \frac{N_{1v}}{\kappa_v^4} B_v, \quad \frac{\partial N_v}{\partial r} = \frac{N_{2v}}{\kappa_v^4} \frac{\partial B_v}{\partial r}$$

$$N_{1v} = \left[p_0 \kappa_0 + 2\kappa_v (B_v - 4p_0 T \varepsilon^2) \right] \frac{\kappa_0}{p_0 \varepsilon^4 T^{16}} \left(\frac{T_0}{7} \right)^2, \quad B_v = \frac{p_0 \varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T} - 1}, \quad p_0 = 100, \quad \varepsilon = h\nu,$$

$$N_{2v} = \left\{ p_0 \kappa_0^2 + \left[6 \left(\frac{B_v}{p_0} - 8T \varepsilon^2 \right) \kappa_v + 8\kappa_0 \right] \kappa_v B_v - 24\kappa_v p_0 T \varepsilon^2 (\kappa_0 - 5\varepsilon^2 \kappa_v T) \right\} \frac{1}{p_0 \varepsilon^4 T^{16}} \left(\frac{T_0}{7} \right)^2,$$

$$U_v = B_v - \frac{1}{\kappa_v} \frac{\partial S_v}{\partial r} \approx B_v + \frac{1}{3} N_v = \left(1 + \frac{N_{1v}}{3\kappa_v^4} \right) B_v, \quad S_v \approx -\frac{1}{3\kappa_v} \frac{\partial B_v}{\partial r}$$

Из этих формул видно, что коэффициент $D_v > 0$ при $N_{1v} \geq 0$, коэффициент $m_v > 0$ при $\frac{N_{2v}}{\kappa_v^4} < \frac{5}{3}$, коэффициент $\alpha_{vk} \geq 0$ при $0 \leq \frac{N_{2v}}{\kappa_v^4} < \frac{5}{3}$. В реальной среде можно ослабить требование неотрицательности коэффициента α_{vk} и рассматривать выполнение условия $\alpha_{cv} + \alpha_{sv} + \alpha_{vk} \geq 0$. Этого условия достаточно для корректности диффузионного

уравнения в приближении КП. Тогда из соотношения $\alpha_{vk} + \kappa_v = \frac{\kappa_v}{m_v}$ получаем, что условие $\alpha_{vk} + \kappa_v \geq 0$ выполняется при $\kappa_v \geq 0$ и $m_v > 0$.

Задачи Флека рассматривают на интервале энергий фотонов $0 < \varepsilon < 15$ кэВ, поэтому на рисунках 3.4-3.7 приведены профили коэффициентов КП и КД для трех значений энергии фотонов из этого интервала $\varepsilon = 0.15, 2.85, 13$ кэВ.

На рисунке 3.4 приведены профили коэффициентов D, m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 0.15$ кэВ.

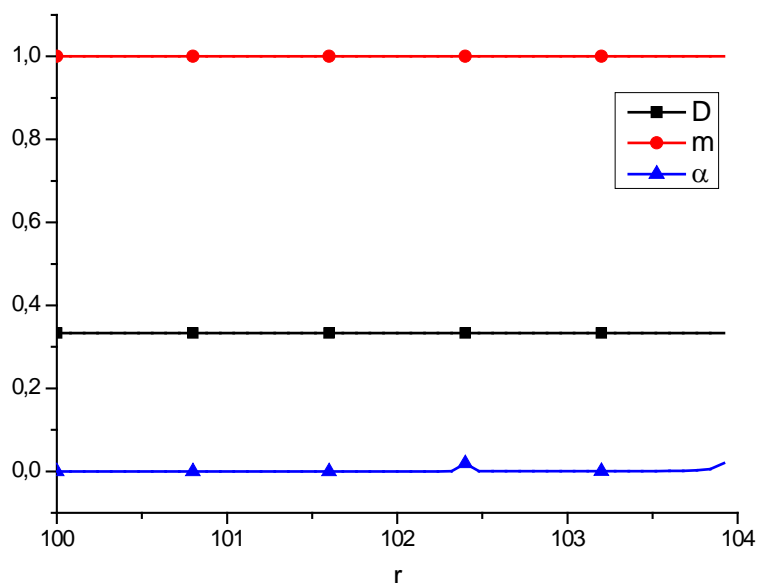


Рисунок 3.4 - Профили коэффициентов D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 0.15$ кэВ

Из рисунка видно, что корректирующие коэффициенты D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 0.15$ кэВ имеют практически постоянные значения около величин $D=1/3$, $m=1$ и $\alpha_k=0$.

На рисунке 3.5 приведены профили коэффициентов D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 2.85$ кэВ.

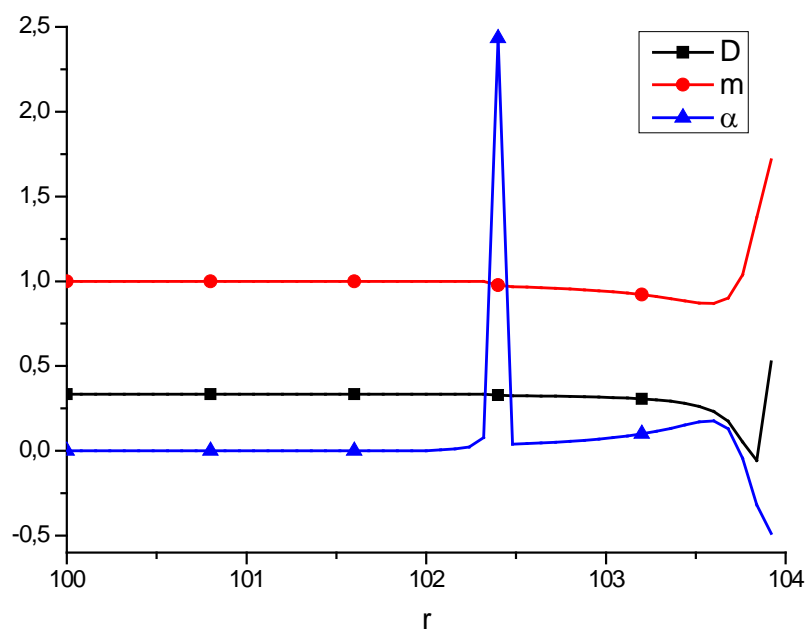


Рисунок 3.5 - Профили коэффициентов D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 2.85$ кэВ

Из рисунка видно, что корректирующие коэффициенты D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 2.85$ кэВ являются ограниченными, но немонотонными функциями от r . Резкое

изменение корректирующих коэффициентов на границе системы при $r=104$ см и коэффициента α_k на интервале $102\text{см} < r < 102.4\text{см}$ может объясняться недостаточностью двух членов при разложениях решения в ряд. Хотя коэффициент α_k принимает отрицательные значения при $r=104$ см, суммарный коэффициент $\kappa + \alpha_k$ положителен.

На рисунке 3.6 приведены профили коэффициентов D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 13$ кэВ.

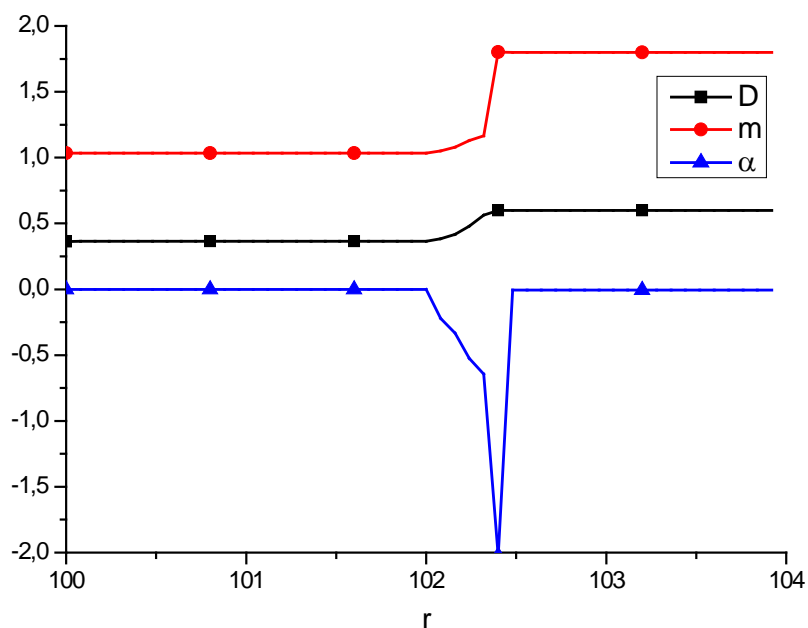


Рисунок 3.6 - Профили коэффициентов D , m и α_k для энергии фотонов $\varepsilon = 13$ кэВ

Из рисунка видно, что корректирующие коэффициенты D и m для энергии фотонов $\varepsilon = 13$ кэВ являются монотонными, положительными и ограниченными функциями от r . Коэффициент α_k является немонотонной, ограниченной и отрицательной на интервале $102 \text{ см} < r < 102.4 \text{ см}$ функцией. Несмотря на это, суммарный коэффициент $\kappa + \alpha_k$ везде положителен (см. рис. 3.7).

На рисунке 3.7 приведены профили коэффициентов κ и $\kappa + \alpha_k$ для энергии фотонов $\varepsilon = 13$ кэВ.

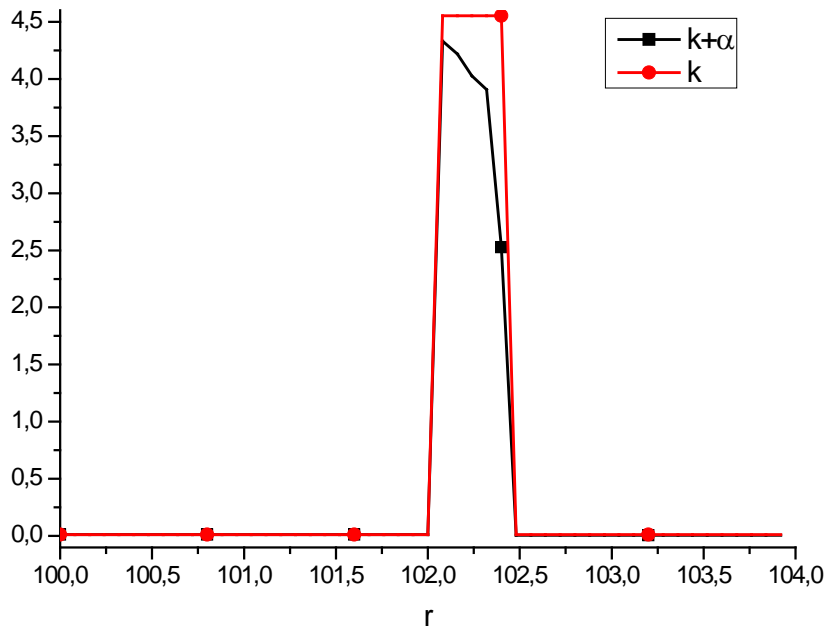


Рисунок 3.7 - Профили коэффициентов κ и $\kappa + \alpha_k$ для энергии $\varepsilon = 13$ кэВ

Из рисунка видно, что, хотя коэффициент α_k является отрицательной функцией на интервале $102 \text{ см} < r < 102,4 \text{ см}$, суммарный коэффициент $\kappa + \alpha_k$ является положительной и ограниченной функцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование и сравнение корректирующих коэффициентов, которые используются в КД и КП приближениях. Рассмотрены свойства монотонности, положительности, непрерывности и ограниченности для этих коэффициентов на трех задачах, имеющих аналитические решения. В рассмотренных задачах получены аналитические формулы для корректирующих коэффициентов и показано, что коэффициенты D_v , m_v и $\alpha_c + \alpha_k$ являются положительными функциями.

Доказана эквивалентность первого и второго вариантов КП приближения, позволяющая в первом варианте не использовать коэффициенты квазидиффузии.

Для оптически плотных сред получено асимптотическое представление корректирующих коэффициентов в КД и КП приближениях. Установлено, что в оптически плотных средах порядок сходимости коэффициентов D_v и m_v совпадает с порядком сходимости основных величин U_v и P_v к диффузионному пределу.

Исследования на стационарном решении в вакууме показали, что коэффициенты КД и КП являются монотонными, непрерывными и положительными функциями от r . Коэффициенты D и χ ограничены, а коэффициент α_k неограничен при $r \rightarrow 0$.

Исследования на нестационарном решении в вакууме показали, что в областях, где коэффициенты КД и КП не определены, на них приходится вводить ограничения. Это позволяет сделать коэффициенты D и χ непрерывными и положительными функциями.

Исследования на стационарном решении в реальной среде показали, что коэффициенты D и m являются непрерывными, положительными и ограниченными

функциями. Коэффициент α_k может быть отрицательным, но суммарный коэффициент $\alpha_c + \alpha_k$ является положительной и ограниченной функцией.

Исследования, проведенные в данной работе на трех задачах, имеющих аналитические решения, показали, что коэффициенты КП, кроме α_k , являются положительными функциями. Отрицательность коэффициента α_k не нарушает корректность диффузионного уравнения в КП приближении. В оптически плотных средах коэффициенты КД и КП стремятся к постоянным величинам, в оптически прозрачных средах они имеют более сложный вид. Очевидно, что данные исследования не могут быть обобщены на весь класс решений СУПТИ, но они показывают, что в некоторых случаях использование корректирующих коэффициентов позволяет для численного решения кинетического уравнения использовать решение диффузионного уравнения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- ¹ Гольдин В.Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. ЖВМ и МФ, 1964, т.4, №6, С.1078-1087.
- ² Н.Г. Карлыханов, М.Ю. Козманов. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения. ВАНТ, 2010, в.4, с.3-9.
- ³ Аристова Е.Н., Гольдин В.Я., Колпаков А.В. Перенос излучения через кольцевую щель в теле вращения. Математическое моделирование, 1997, т.9, №4, С.1-10.
- ⁴ Карлыханов Н.Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения, ВАНТ, Серия «Математическое моделирование физических процессов», Выпуск 1, 2010, С.32-38.
- ⁵ Гаджиев А.Д., Селезнев В.Н., Романова Е.М., Шестаков А.А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении. ВАНТ, 2001, в.4, с.48-59.
- ⁶ Грабовенская С.А., Шестаков А.А. Анализ некоторых схем для решения уравнения переноса излучения квазидиффузионным методом. ВАНТ, 2011, в.4, с.3-15.
- ⁷ Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Конечно-объемная схема ГРОМ для решения переноса излучения квазидиффузионным методом. ВАНТ, 2014, в.3, с. 47-58.
- ⁸ Кошутин Д.А., Шестаков А.А. Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса. ВАНТ, 2017, в.3, с.39-50.
- ⁹ Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Грабовенская С.А., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом. ВАНТ, 2010, в.3, с.3-14.
- ¹⁰ Fleck J.A., Cummings J.D. An Implicit Monte-Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport, J.Comput.Phys., 1971, Vol.8(3), P.313-342.
- ¹¹ Завьялов В.В., Шестаков А.А. Упрощенные решения задач Флека. ВАНТ, 2013, в.1, с.45-52.
- ¹² Edward W. Larsen, Guido Thommes, Axel Klar, Mohammed Sead and Thomas Gotz. Simplified *PN* Approximations to the Equations of Radiative Heat Transfer and Applications. J. of Comput. Phys. 183, 652-675 (2002).