

Визуализация начальных течений воздуха при организации продува вверх

**Кононов Сергей Николаевич,
Левунина Эльвира Сайфулловна**

Постановка задачи моделирования

В монографии [1] группой учёных под руководством Баутина С.П. была представлена полная система уравнений Навье-Стокса (НСУНС) в цилиндрических координатах для сжимаемого вязкого и теплопроводного газа в поле силы тяжести и с учётом силы Кориолиса.

Задача, поставленная с произвольными начальными и граничными условиями не имеет аналитического решения, поэтому было решено использовать численные методы.

Модель проверялась на известном точном решении – неоднородном состоянии покоя.

[1]. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 400 с.

ПСУНС в цилиндрических координатах

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \rho_t + u\rho_r + \frac{v}{r}\rho_\varphi + w\rho_z + \rho \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\
 & u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_r + \frac{1}{\gamma}T_r = av - b \cos \varphi w + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(u_{rr} + \frac{3}{4r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u + \frac{1}{4r}v_{r\varphi} - \frac{7}{4r^2}v_\varphi + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}w_{rz} \right), \\
 & v_t + uv_r + \frac{wv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{T}{\gamma r \rho}\rho_\varphi + \frac{1}{\gamma r}T_\varphi = -au + b \sin \varphi w + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4r}u_{r\varphi} + \frac{7}{4r^2}u_\varphi + \frac{3}{4}v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r}v_r - \frac{3}{4r^2}v + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4r}w_{\varphi z} \right), \\
 & w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = b \cos \varphi u - b \sin \varphi v - g + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4}u_{rz} + \frac{1}{4r}u_z + \frac{1}{4r}v_{\varphi z} + \frac{3}{4}w_{rr} + \frac{3}{4r^2}w_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r}w_r + w_{zz} \right), \\
 & T_t + uT_r + \frac{v}{r}T_\varphi + wT_z + (\gamma - 1)T \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = \\
 & = \frac{\kappa_0}{\rho} \left(T_{rr} + \frac{1}{r^2}T_{\varphi\varphi} + T_{zz} + \frac{1}{r}T_r \right) + \\
 & + \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho} \left\{ \left[\cos 2\varphi \left(u_r - \frac{1}{r}v_\varphi - \frac{1}{r}u \right) - \sin 2\varphi \left(v_r + \frac{1}{r}u_\varphi - \frac{1}{r}v \right) \right]^2 + \right. \\
 & + \left[\cos^2 \varphi u_r - \cos \varphi \sin \varphi v_r - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r}u_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r}v_\varphi + \right. \\
 & + \left. \frac{\sin^2 \varphi}{r}u + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}v - w_z \right]^2 + \\
 & + \left[\sin^2 \varphi u_r + \cos \varphi \sin \varphi v_r + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r}u_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r}v_\varphi + \right. \\
 & + \left. \frac{\cos^2 \varphi}{r}u - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}v - w_z \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[\sin 2\varphi \left(u_r - \frac{1}{r}v_\varphi - \frac{1}{r}u \right) + \cos 2\varphi \left(v_r + \frac{1}{r}u_\varphi - \frac{1}{r}v \right) \right]^2 + \\
 & \left. + \frac{3}{2} \left[(u_z + w_r)^2 + \left(v_z + \frac{1}{r}w_\varphi \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \right.$$

где:

ρ - плотность газа;

T - температура газа;

u, v, w - радиальная,

окружная и

вертикальная

составляющие скорости

газа;

Разностная схема

Производится замена дифференциального уравнения на конечно-разностную аппроксимацию, позволяющую с заданной точностью находить значения параметров уравнения в узлах сетки на следующем временном слое в зависимости от предыдущего значения в исходном и соседних узлах.

Замена частных производных разностями:

i, j, k - номера шагов по r, φ, z соответственно,

hr - шаг по r , $h\varphi$ - шаг по φ , hz - шаг по z ,

τ - шаг по времени,

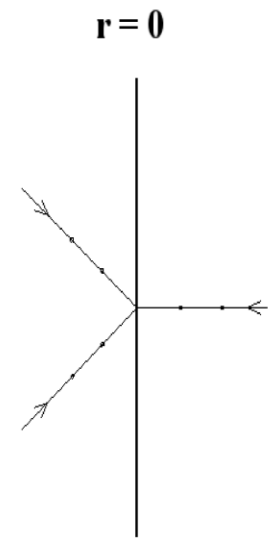
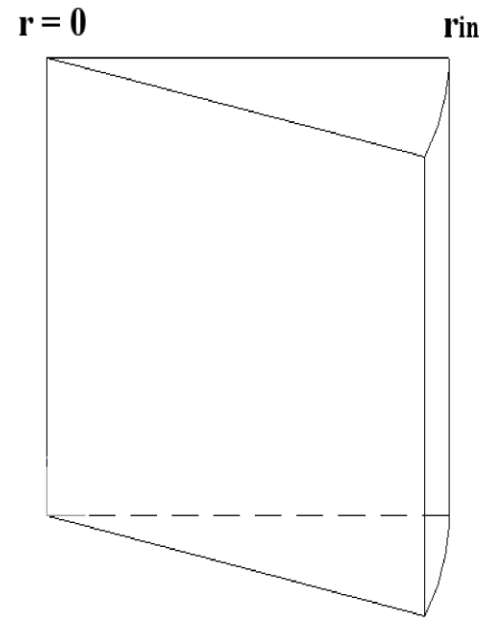
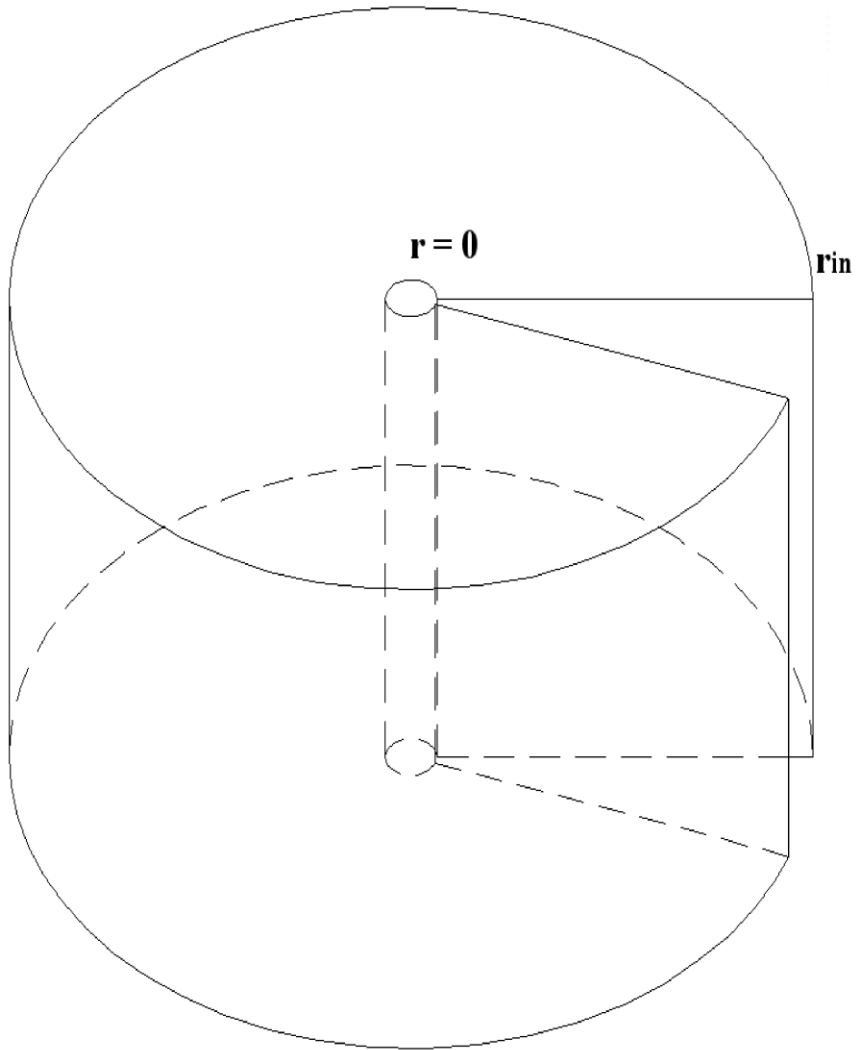
n - номер шага по времени.

$$\frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot hr}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{hr^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4hr \cdot \alpha}$$

Разделение на три части области моделирования



Проверка построенной схемы

Для проверки разностной схемы бралось точное решение ПСУНС (1):

1. Составляющие скорости газа во всех точках равны нулю:

$$u = v = w = 0 \quad (3)$$

2. Температура воздуха линейно падает с ростом высоты [1]:

$$T(z) = 1 - \kappa \cdot z = 1 - ((l_* \cdot T_{00})/r_{00}) \cdot z = 1 - 0,1106 \cdot z \quad (4)$$

где $l_* = 0,0065$ К/м

3. Плотность воздуха зависит только от высоты [1]:

$$\rho(z) = (1 - 0,1106 \cdot z)^{\nu-1}, \quad (5)$$

где $\nu = (\gamma \cdot g)/\kappa = 5,471128$

Указанные значения газодинамических параметров (3)-(5) были приняты за начальные и краевые условия.

Реализация сеточной модели

Моделируемый объем
воздуха

$$r \in [0; 1]$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$z \in [0; H]$$



Параметры сетки

$$i: \text{от } 0 \dots \text{ до } i_{\max}$$

$$j: \text{от } 0 \dots \text{ до } j_{\max}$$

$$k: \text{от } 0 \dots \text{ до } k_{\max}$$

Реализована [2] явная
схема для проверки
точного решения –
состояния

неоднородного покоя на
сетке с параметрами:

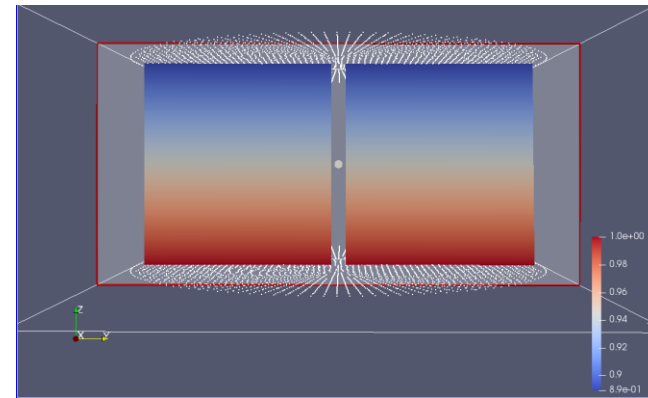
$$i_{\max} = 500;$$

$$j_{\max} = 200;$$

$$k_{\max} = 500.$$

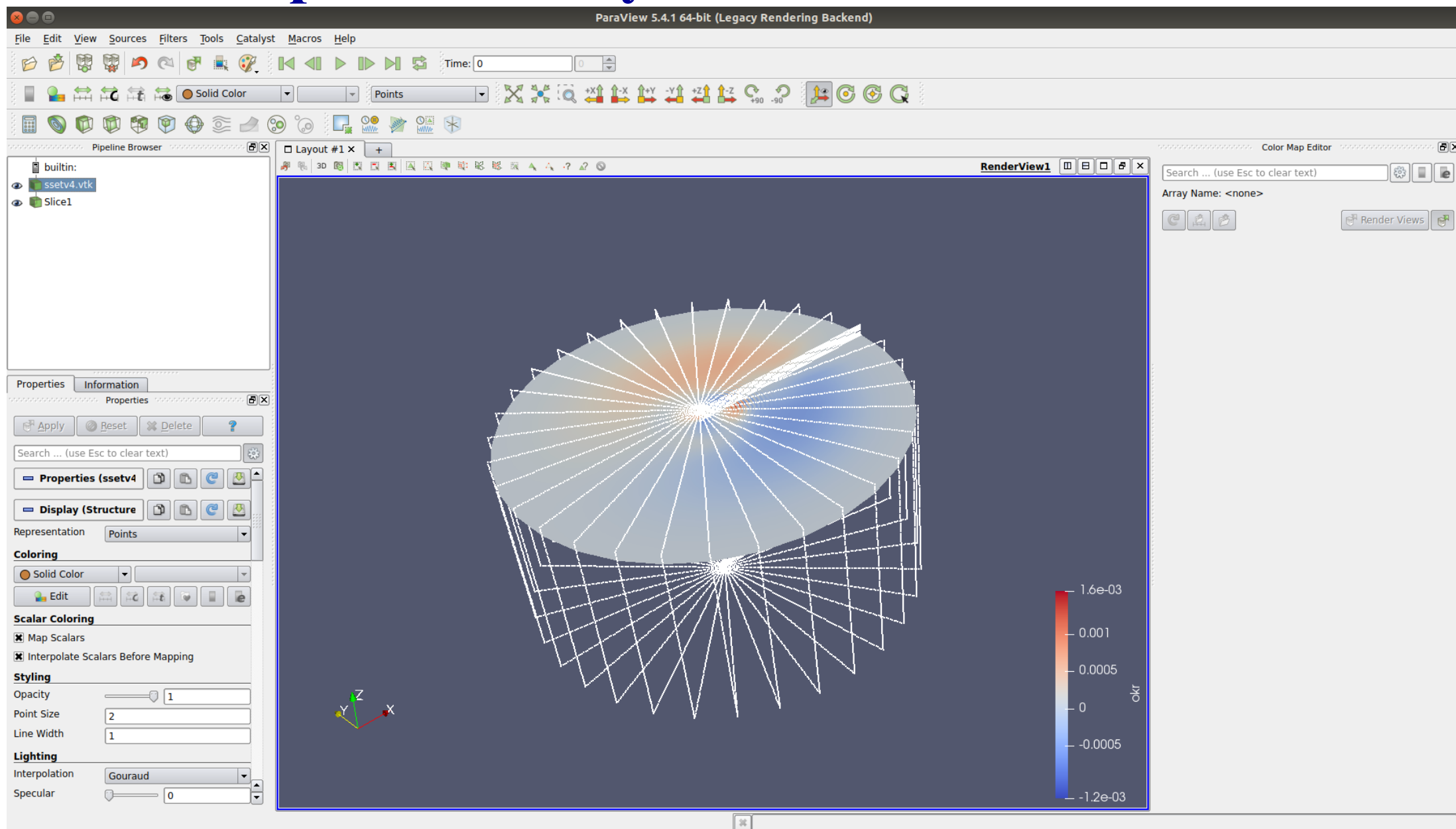
После 100 000 шагов по времени
максимальное отклонение от точного
решения было

не более 10^{-10} !

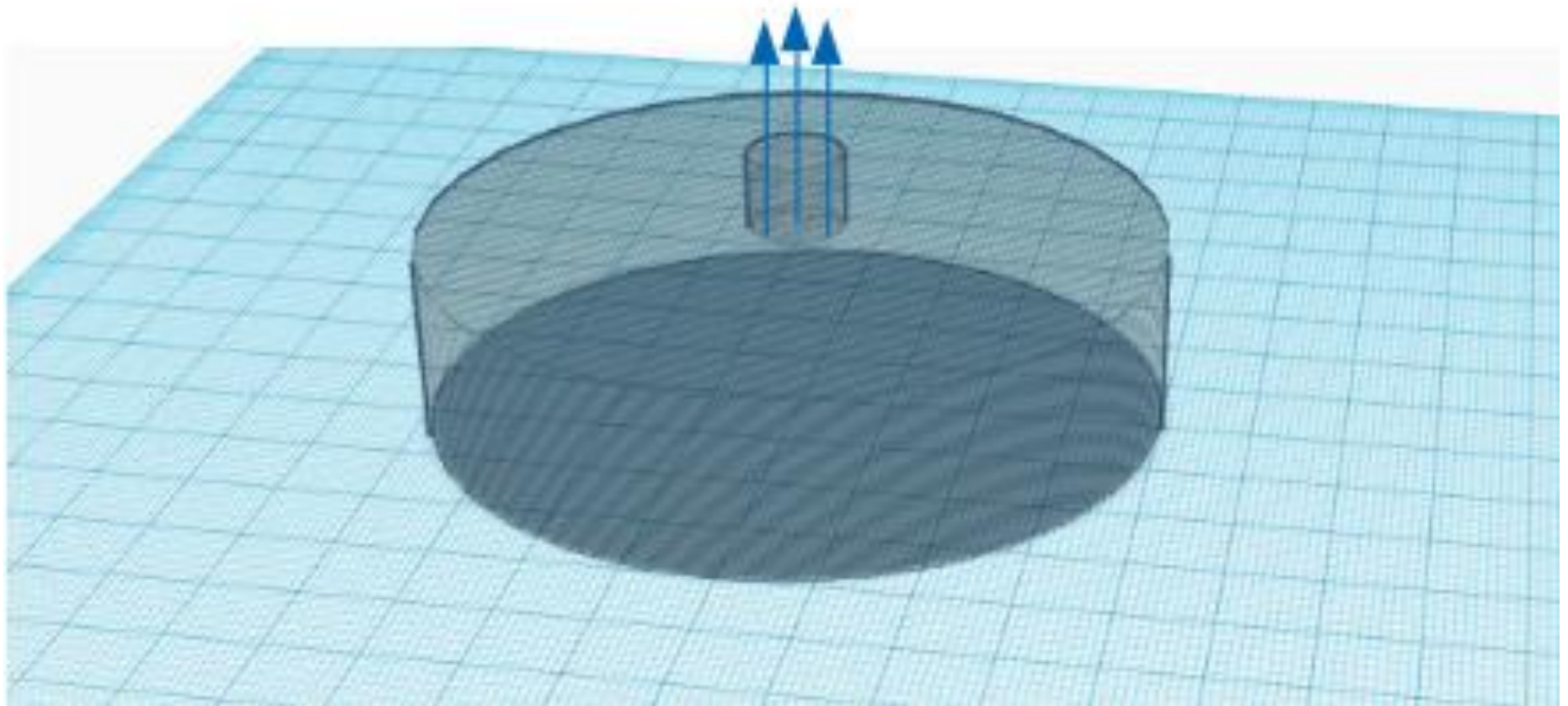


[2]. Баутин С.П. Адаптация для кластера расчета по явной схеме одной газодинамической задачи в цилиндрических координатах / С.П. Баутин, С.Н. Кононов, Э.С. Левунина // Сборник трудов IX международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Новосибирск: ИГИЛ СО РАН, 2020

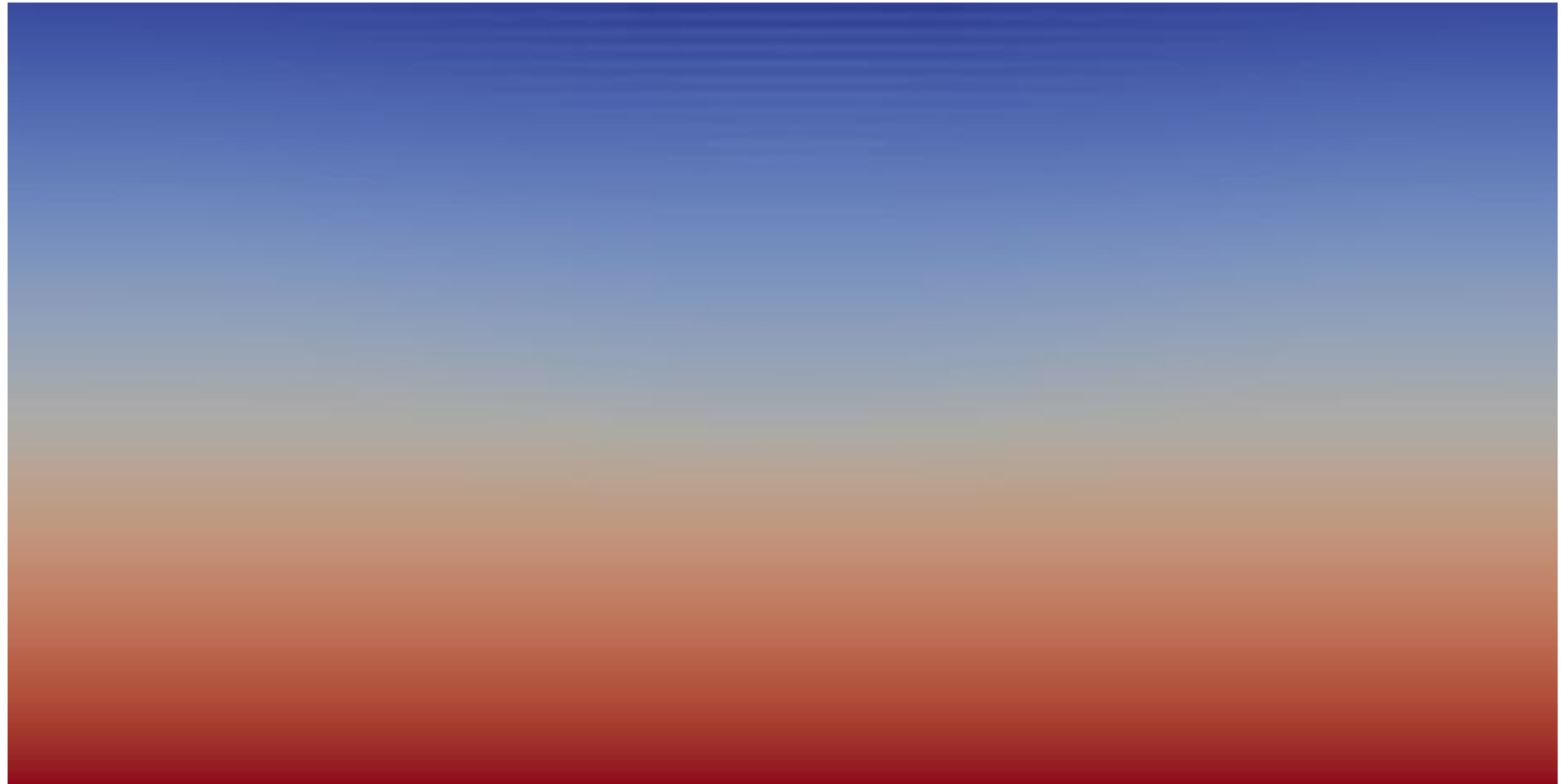
Средство визуализации: ParaView



Продув вверх

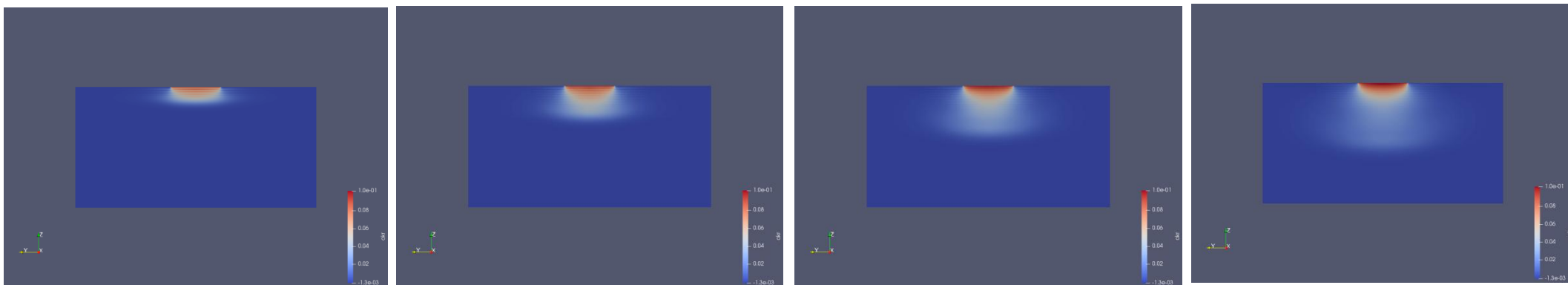


Вертикальный срез давления

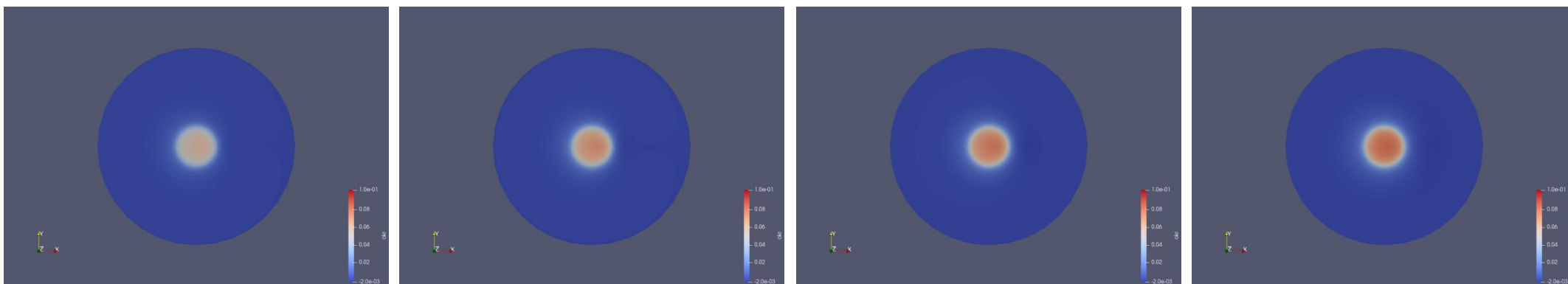


Небольшое изменение давления под вытяжной трубой через $t=6$ сек.

Вертикальная составляющая скорости

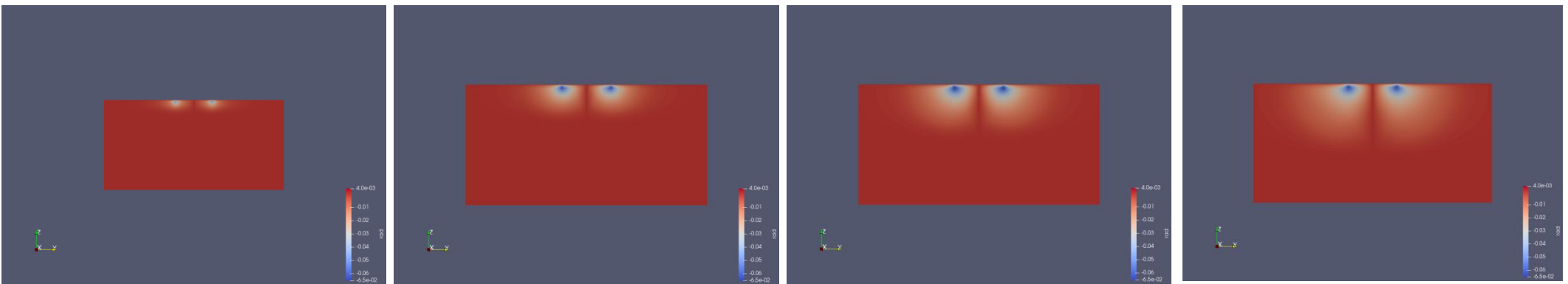


Вертикальный срез изменения за 6 секунд вертикальной составляющей скорости газа.



Горизонтальный срез изменения за 6 секунд вертикальной составляющей скорости газа, безразмерная высота $z=0.95$

Радиальная составляющая скорости



Вертикальный срез изменения за 6 секунд радиальной составляющей скорости газа.

Выводы

1. Выбранное средство визуализации с большой наглядностью отображает исследуемые процессы в газе.
2. Полученные результаты в начальные моменты движения соответствуют наблюдениям экспериментов.
3. Графическое отображение расчётов характеристик газа удобно сравнивать с аналогичными расчётами в декартовых координатах [3].

[3]. Баутин С. П., Обухов А. Г. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. – Екатеринбург : УрГУПС. – 2020. 290 с.

Спасибо за внимание!