

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛАГРАНЖЕВЫМИ И ЭЙЛЕРОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Н.Л. Клиначева, М.С. Жарылканова, Е.С. Шестаковская, А.П. Яловец
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)



Аннотация. В данной работе представлены результаты математического моделирования взаимодействия твердого тела и газа. Разработанный программный комплекс основан на алгоритме, позволяющем моделировать взаимодействие движущихся различных сред, например взаимодействие скоростного газового потока с твердым телом. Проведена верификация численного алгоритма на тестовых задачах. Полученные результаты позволяют сделать вывод о применимости программного комплекса для решения задач о взаимодействии высокоскоростных потоков газов и жидкостей с твердыми телами.

Математическая модель

Система дифференциальных уравнений для твердого тела:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho \frac{\dot{V}}{V}; \quad \dot{V} = V(v_{rr} + v_{\varphi\varphi} + v_{zz}); \\ \rho \dot{v}_r &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r}; \quad \rho \dot{v}_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r}; \\ \rho \dot{U} &= -P \frac{\dot{V}}{V} + (S_{rr}v_{rr} + S_{\varphi\varphi}v_{\varphi\varphi} + S_{zz}v_{zz} + 2S_{rz}v_{rz}) - (\nabla \cdot \vec{q}); \quad \vec{q} = -\kappa \nabla T; \\ \dot{S}_{rr}^0 &= 2\mu \left(v_{rr} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right); \quad \dot{S}_{zz}^0 = 2\mu \left(v_{zz} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right); \quad \dot{S}_{\varphi\varphi}^0 = -\dot{S}_{rr}^0 - \dot{S}_{zz}^0; \quad \dot{S}_{rz}^0 = 2\mu v_{rz}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений для газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\eta v_{ik}), \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U v_k)}{\partial x_k} &= (-P \delta_{ik} + 2\eta v_{ik}) v_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + W, \end{aligned}$$

При решении задач о движении продуктов детонации уравнение состояния для газа было взято в форме JWL.

Результаты численного моделирования

1. Задача о поршне. В вакууме находится цилиндр с идеальным газом под давлением p_0 . С правой стороны в цилиндр вставлен поршень единичной массой $m_{\text{п}}$. После снятия ограничителя поршень начинает движение вправо. Положение поршня при $t = 0, x = 0$. Область газа $-100 < x < 0$ мм. Длина поршня 10 мм. Численное решение сравнивалось с аналитическим решением [1].

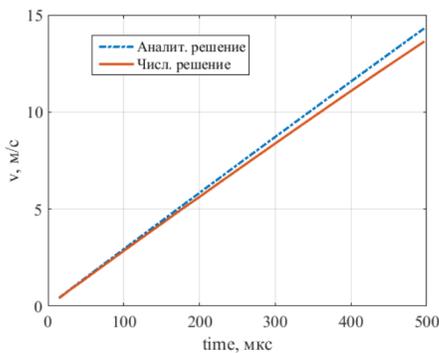
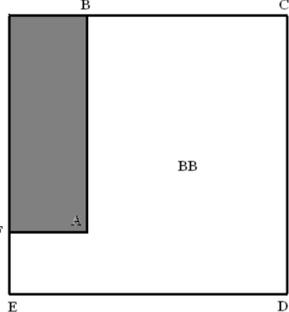


Рис.1. Зависимость скорости поршня от времени, $p_0 = 2.3 \cdot 10^6$ Па

2. Выход детонационной волны из плоского канала в расширяющееся пространство.



В области ABCDEFA содержится ВВ (ТЭН). $AB=8$ см, $BC=7,9$ см, $CD=DE=10,4$ см, $EF=2,4$ см, $FA=2,5$ см. На левой границе EF в начальный момент времени инициируется плоская волна со скоростью детонации $D=8300$ м/с.

Точное решение [2]: окружность $R = D(t - FA/D)$ с центром в точке А.

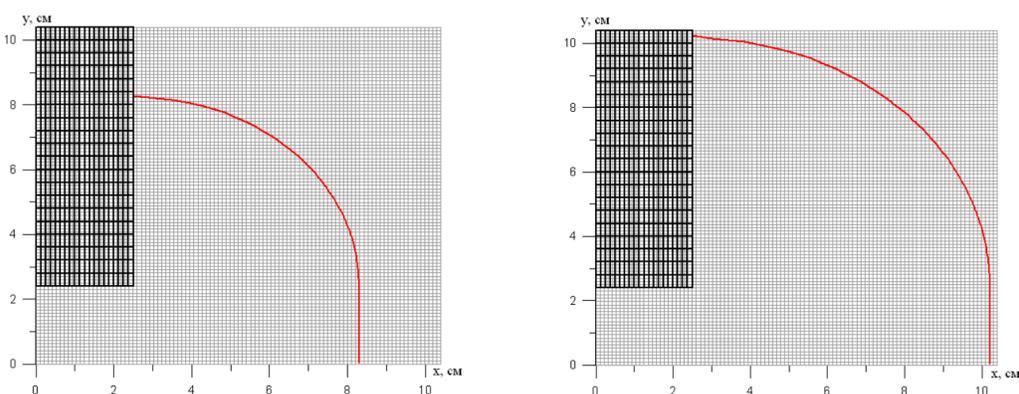
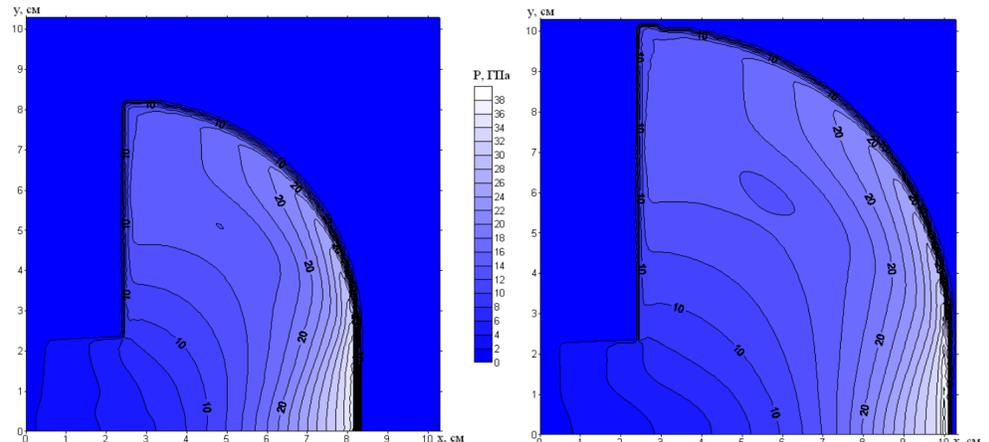


Рис.2. Положение фронта детонационной волны $t=10$ мкс и $t=12.3$ мкс

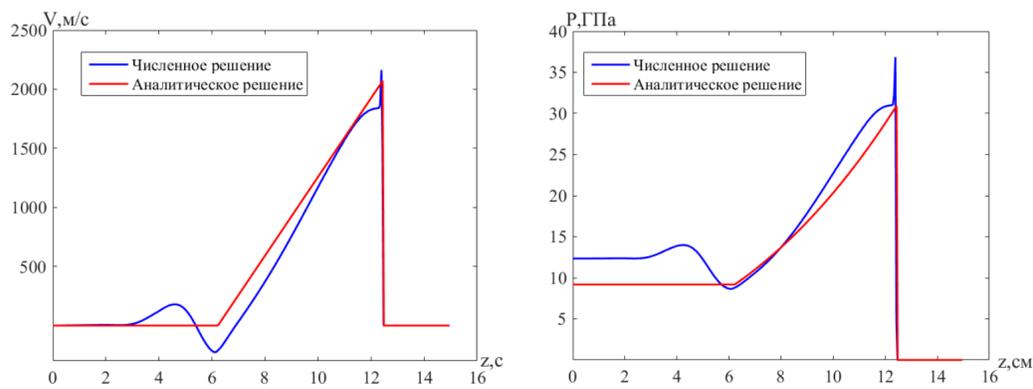


а) $t=10$ мкс

б) $t=12.3$ мкс

Рис.3. Поле давления ПВ за фронтом детонационной волны

3. Разлет продуктов детонации от жесткой стенки. В трубе радиуса 5 см и длиной 15 см находится ВВ (ТЭН). С левого закрытого торца инициируется детонационная волна. Численные результаты сравнивались с аналитическим решением [3].



а)

б)

Рис.4. Распределение скорости и давления вдоль оси трубы

4. Разлет медной трубки под действием продуктов детонации. Медная трубка заполнена ВВ (ТЭН). Детонация инициируется с левого торца. Геометрические размеры трубки [4]: внутренний радиус $R_{\text{in}}=1.27$ см, внешний радиус $R_{\text{out}}=1.53$ см, длина трубки $L=30.5$ см.

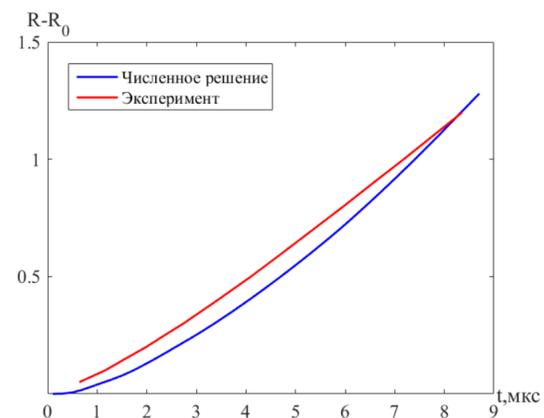


Рис.5. Изменение внешнего радиуса с течением времени

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать вывод о применимости разработанного программного комплекса к решению задач о взаимодействии твердых тел с высокоскоростными газовыми потоками.

1. Б.Г. Лобойко, О.Ю. Диков, Е.Б. Смирнов Сборник задач по газодинамике взрыва. – Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2007. 227 с.
2. Л.П. Орленко, Физика взрыва и удара // М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2006. – 304с.
3. Urtiew P. A., Hayes B. Parametric Study of the Dynamic JWLEOS for Detonation Products. Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves, 1991, no. 4, pp. 126–136.
4. Lee E. L., Hornig H. C. and Kury J. W. Adiabatic expansion of high explosive detonation products, UCRL-50422. –Livermore (CA), 1968.