

Введение

В данной работе представлено обобщение полуаналитического метода [1] на случай решения задач в эйлеровых переменных.

Особенностью полуаналитического метода является то, что конечными разностями заменяются только пространственные производные, а скорость находится из аналитического уравнения движения. Таким образом, система уравнений газовой динамики сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на пространственной сетке. Приближенное аналитическое решение данной системы дифференциальных уравнений для малого временного интервала применяется для описания динамики газа во всем требуемом временном интервале.

Проведена верификация метода на одномерных тестовых задачах о распаде произвольного разрыва и распространении стационарных ударных волн различной интенсивности. Для одномерных задач приведено сравнение с простым в реализации базовым методом крупных частиц [2]. В качестве двумерной задачи рассмотрено развитие неустойчивости Рихтмайера-Мешкова в постановке эксперимента Зайцева [3].

Математическая модель

Система дифференциальных уравнений в эйлеровых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial(2\eta v_{ik})}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U v_k)}{\partial x_k} &= -(P\delta_{ik} + 2\eta v_{ik})v_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}; \\ P &= P^0(\rho, U) + \delta P. \end{aligned}$$

Разностная схема

$$m_{i+1/2}(t_{n+1}) = m_{i+1/2}(t_n) + (J_{i+1} - J_i)^n \cdot \Delta t,$$

$$J_i = v_i \cdot \begin{cases} \rho_{i-1/2}, & v_i > 0 \\ \rho_{i+1/2}, & v_i < 0 \end{cases}, \quad J_{i+1} = v_{i+1} \cdot \begin{cases} \rho_{i+1/2}, & v_{i+1} > 0 \\ \rho_{i+3/2}, & v_{i+1} < 0 \end{cases};$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + 2\gamma_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \omega_i^2 v_i = L_i \rightarrow v_i(t_{n+1}) = v_i^n + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^n e^{-\gamma\Delta t} \frac{S(\Omega\Delta t)}{\Omega} + \left(\frac{L}{\omega^2} - v^n\right) \left[1 - e^{-\gamma\Delta t} \left(C(\Omega\Delta t) + \gamma \frac{S(\Omega\Delta t)}{\Omega}\right)\right],$$

$$\gamma_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial m_i}{\partial t}, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{m_i} (Q_{i+1/2} + Q_{i-1/2}), \quad \Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2, \quad \Omega = \sqrt{|\Omega^2|},$$

$$L_i = \frac{1}{m_i} \left[(Q_{i+1/2} v_{i+1} + Q_{i-1/2} v_{i-1}) + \left(v \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i+1/2} - \left(v \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i-1/2} \right],$$

$$C(\Omega\Delta t) = \begin{cases} \cos(\Omega\Delta t), & \Omega^2 \geq 0 \\ \text{ch}(\Omega\Delta t), & \Omega^2 < 0 \end{cases}, \quad S(\Omega\Delta t) = \begin{cases} \sin(\Omega\Delta t), & \Omega^2 \geq 0 \\ \text{sh}(\Omega\Delta t), & \Omega^2 < 0 \end{cases};$$

$$U_{i+1/2}(t) = U_{i+1/2}^n + \frac{1}{m_{i+1/2}^n} \left[-P(t_n)\Delta V + Q \frac{\Delta V^2}{2} \right]_{i+1/2} + \frac{\Delta t}{m_{i+1/2}^{n+1}} \cdot \left\{ [\rho_{i+3/2}(U_{i+3/2} - U_{i+1/2})v_{i+1}]_{v_{i+1} < 0} - [\rho_{i-1/2}(U_{i-1/2} - U_{i+1/2})v_i]_{v_i > 0} \right\}^n$$

Результаты одномерного расчета

1. Распад произвольного разрыва

$\rho_1 = 3.87 \text{ кг/м}^3$; $T_1 = 611.5 \text{ К}$; $U_1 = 0 \text{ м/с}$; $P_1 = 1.4 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $x \leq 5 \text{ мм}$;
 $\rho_0 = 2.58 \text{ кг/м}^3$; $T_0 = 91.7 \text{ К}$; $U_0 = 0 \text{ м/с}$; $P_0 = 1.4 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $x > 5 \text{ мм}$.

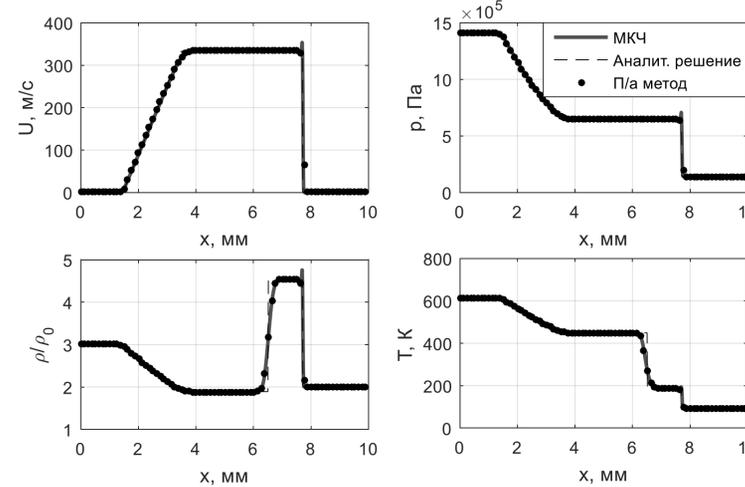


Рис. 1. Распад произвольного разрыва. Распределения скорости, давления, безразмерной плотности и температуры на момент времени 4.5 мкс.

2. Распространение сильной УВ

$\rho_0 = 1.29 \text{ кг/м}^3$; $T_0 = 300 \text{ К}$; $U_0 = 0 \text{ м/с}$; $P_0 = 2.29 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $0 < x \leq 10 \text{ мм}$.
 Через границу ($x = 0$) в расчетную область втекает стационарный поток с параметрами: $P_1 = 10P_0$; ρ_1 ; T_1 ; U_1 .

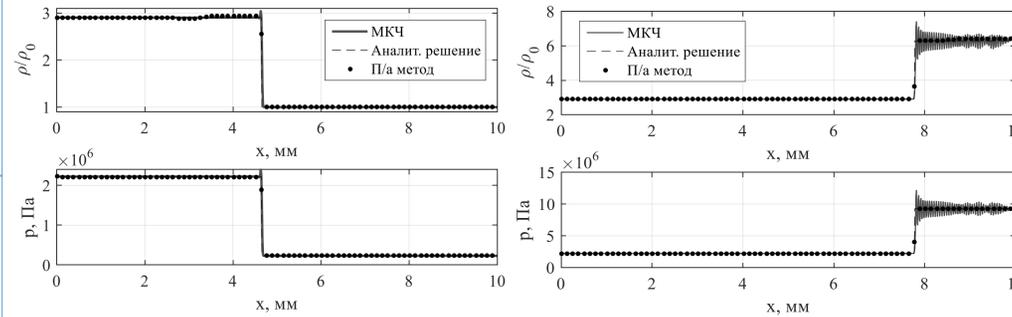


Рис. 2. Распространение сильной УВ. Распределения безразмерной плотности и давления на моменты времени 3 мкс (падающая) и 9 мкс (отраженная).

3. Распространение слабой УВ

$\rho_0 = 1.29 \text{ кг/м}^3$; $T_0 = 300 \text{ К}$; $U_0 = 0 \text{ м/с}$; $P_0 = 2.29 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $0 < x \leq 10 \text{ мм}$.
 Через границу ($x = 0$) в расчетную область втекает стационарный поток с параметрами: $P_1 = 1.5P_0$; ρ_1 ; T_1 ; U_1 .

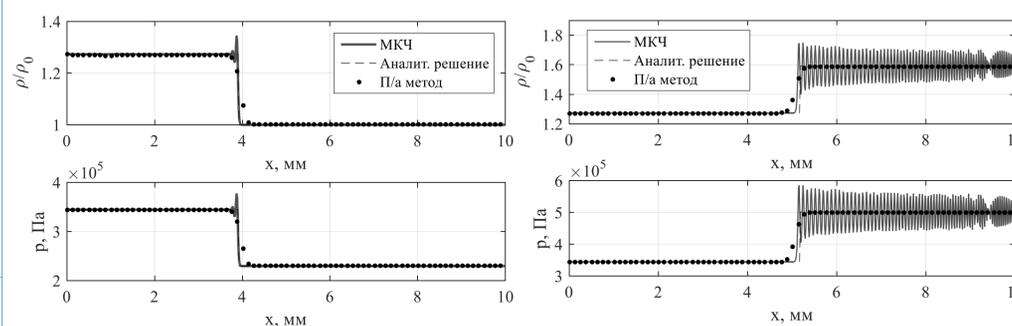


Рис. 3. Распространение слабой УВ. Распределения безразмерной плотности и давления на моменты времени 6 мкс (падающая УВ) и 24 мкс (отраженная).

Результаты двумерного расчета

Эксперимент проводился на ударной трубе квадратного сечения. Ударная волна проходит из аргона в ксенон (слева направо), начальное давление $p_0 = 0.5 \text{ атм.}$, число Маха падающей ударной волны $M = 3.5$. Начальное возмущение на исходной границе задавалось в виде:

$$y = a_0 \sin(kx), \quad k = 2\pi/\lambda, \quad a_0 = 5 \text{ мм}, \quad \lambda = 36 \text{ мм}.$$

Время отсчитывается от момента взаимодействия падающей УВ с контактной границей (пленкой). На рисунках красным цветом обозначены экспериментальные данные.

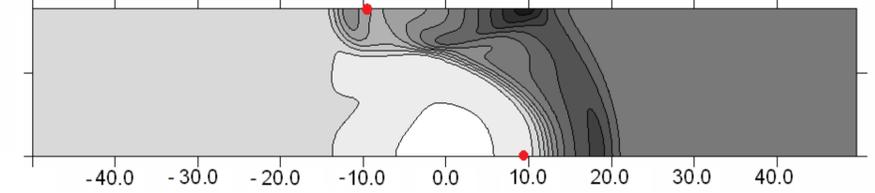


Рис. 4. Плотность на момент времени 50 мкс.

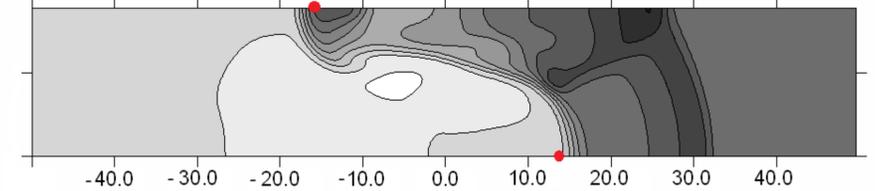


Рис. 5. Плотность на момент времени 100 мкс.

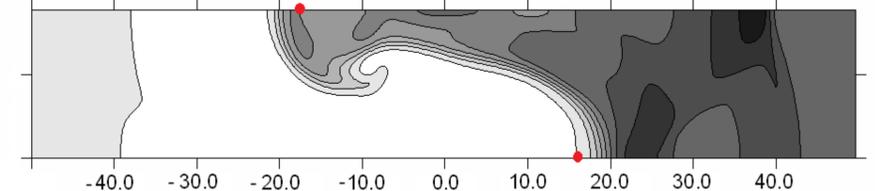


Рис. 6. Плотность на момент времени 150 мкс.

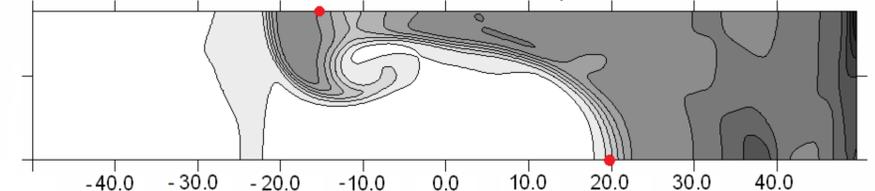


Рис. 7. Плотность на момент времени 200 мкс.

Заключение

Проведение тестовых расчетов при решении задач газовой динамики показало, что данный метод обеспечивает высокую точность выполнения законов сохранения и характеризуется высокой устойчивостью решения. А использование вязкости как физической добавки делает метод универсальным без необходимости подбора эмпирических констант.

Использованная литература

- Яловец, А.П. Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц / А.П. Яловец // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – Т. 38, № 1. – С. 151–166.
- Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. / О.М. Белоцерковский. – М.: Физматлит, 1994. – С. 27-39.
- Неуважаев, В.Е. Изучение неустойчивости Рихтмайера-Мешкова вихревым методом / В.Е. Неуважаев, Н.Э. Паршук // Челябинск-70. – 1991.