К 100-ЛЕТИЮ К. К. КРУПНИКОВА „УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО УДАРНИКА И МИШЕНИ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ”

В. В. Доценко, Е. Ю. Емельянова, М. В. Никульшин
M.V.Nikulshin@vniitf.ru
ФГУП „РФЯЦ-ВНИИТФ им. акдем. Е. И. Забабахина”,
г.Снежинск

В докладе приводится аналитическое решение задачи ударного взаимодействия жесткого ударника с металлическим стержнем (мишень) со сверхзвуковой скоростью, которое получил К.К. Крупников в представлениях волновой динамики. Материал мишени описывается уравнением состояния (УРС) Я.Б. Зельдовича.

Верификация результатов численных расчетов, выполненных явным методом интегрирования, с аналитическим решением выявила особенность определения модуля объемного сжатия, который совместно с ударной адиабатой является исходными данными для расчета. Ввиду того, что УРС Я.Б. Зельдовича в расчетном коде не поддерживается, применялся альтернативный способ задания – табулированный УРС на сжатие. При этом модуль объемного сжатия, определяемый, согласно руководству пользователя программы, как $K = P/\mu$ приводит к заниженным значениям давления. Более высокий порядок точности решения обеспечивает модуль объемного сжатия, определенный К. К. Крупниковым, как производная ∂P по $\partial \mu$.

Полученный по итогам верификации табулированный УРС на сжатие, представленный в виде численного массива (ударная адиабата и модуль объемного сжатия), может иметь широкое практическое применение, так как в качестве исходных данных используются имеющиеся экспериментальные ударные адиабаты для разного рода материалов, а также любые параметрические УРСы.

1 Со дня рождения К. К. Крупникова 100 лет

Константин Константинович Крупников (21.01.1922–28.01.2006), родился в г. Воронеж, выпускник Московского Высшего технического училища им. Н. Э. Баумана, лауреат Ленинской (1964) и двух Государственных премий (1949, 1953), награжден орденом Ленина (1949), медалью „За доблестный труд в Великой Отечественной Войне 1941–1945 гг.” и другими орденами и медалями, ветеран атомной энергетики и промышленности (1998) [1]. Почетный гражданин города Снежинск (1999).

С 1947 года – работник атомной отрасли: научный сотрудник п/я 975 (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров), с 1955 года работал в п/я 0215 (РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск). В 1961 году ему присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук.

Доклад посвящен не только 100-летию К. К. Крупникова, а также является анонсом книги „Экстремальные состояния вещества”. В первой части книги обобщены сведения о жизни, профессиональной, научной и общественной деятельности, а также воспоминания близких о совместной жизни и работе. Основную часть книги составляют научные труды. Константин Константинович исследовал динамическую сжимаемость металлов при давлениях в несколько миллионов атмосфер, экспериментально изучал параметры сильных ударных волн в вольфрамовых образцах с различной начальной плотностью, изучал методы непрерывной регистрации скорости среды в ударно-волновых процессах, а также исследовал кварц, графит, эпоксидную смолу и многое другое.

Основные научные интересы К. К. Крупникова: физика трения, газодинамика, физика горения и взрыва, физика ударных волн. Он является одним из разработчиков электроконтактной методики, которая использовалась в исследовании плотностей и максимальных давлений в центральной части первой атомной бомбы СССР (1949). Этот исторический эпизод описывается в статье „Начало физики мегабарных давлений”, опубликованной в журнале „Вестник российской академии наук” в ноябре 2004 года [1].

2 Аналитическое решение задачи ударного взаимодействия

2.1 Постановка задачи

Задачи ударного взаимодействия изучаются целым рядом дисциплин. Задачи с малыми скоростями (менее 250 м/с) относятся к области интересов динамики конструкций. Образование вмятин и проникание на отдельных узлах обусловлено общей деформацией конструкции. Характерные времена измеряются миллисекундами.

С увеличением скорости соударения общая деформация конструкции становится второстепенной. А первостепенное значение приобретает поведение материала в локальной зоне удара. Здесь уже необходимо пользоваться представлениями волновой динамики. На разных стадиях соударения на поведение материала оказывают влияние ряд параметров: скорость удара, геометрия, вид материала, скорость деформации, локальное пластическое течение и разрушение. Характерные времена измеряются микросекундами.

К данному типу задач можно отнести задачу взаимодействия жесткого ударника с металлическим стержнем со скоростью 850 м/с (рис.1). К. К. Крупников, будучи большим профессионалом подобного рода задач, получил аналитическое решение для одномерного случая.

Задача рассматривается в следующей постановке: ударник и мишень представлены в виде стержней длиной 10 см с квадратным поперечным сечением 1×1 см^2. Ударник рассматривается абсолютно жестким телом, мишень выполнена из низкоуглеродистой стали. Требуется оценить скорость мишени.

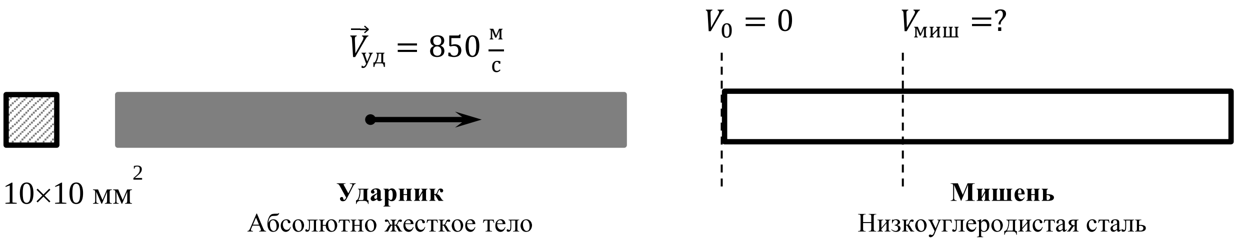


Рис.1 Взаимодействие жесткого ударника с металлическим стержнем
со скоростью 850 м/с

Данная задача характеризуется уровнем слабых ударных волн, когда массовая скорость сопоставима со скоростью звука. Максимальные давления не превышают $P \leq 0.7$ Мбар (70 ГПа).

2.2 Аналитическое решение К. К. Крупникова

К. К. Крупников использует эйлеровый подход. Параметры фронта плоской УВ в материале мишени описываются уравнениями сохранения массы и импульса [2]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad \text{Массы} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \text{Импульса} \qquad (2)$$

Законы сохранения связывают между собой 5 параметров фронта УВ:

- P – давление;
- $\vec{u}_p$ – скорость движения сжатого вещества относительно невозмущенного;
- $\vec{u}_s$ – скорость распространения УВ по невозмущенному веществу;
- ρ – плотность или удельный объем $(1/\rho)$;
- E – энергия.

Для определения давления необходимо уравнение сохранения энергии. К. К. Крупников использует УРС Зельдовича [3]:

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right], \qquad \text{Энергии} \tag{3}$$

где $B = \dfrac{\rho_0 C_0^2}{n}$.

К системе уравнений газодинамики добавляются граничные условия из предположения, что скорость ударника определяет скорость поверхности удара мишени. По второму закону Ньютона уравнение движения мишени записывается в виде:

$$M_{\text{уд}} \frac{du}{dt} = -P, \tag{4}$$

где P – внешнее давление.

Для решения полученной системы уравнений К. К. Крупников использует следующий подход. Известно, что квадрат скорости звука в веществе определяется производной давления по плотности

$$\text{C}^2 = \frac{dP}{d\rho}. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнение Я. Б. Зельдовича (3) по плотности, получаем следующее выражение

$$\text{C}^2 = \frac{dP}{d\rho} = B\frac{n\rho^{(n-1)}}{\rho_0^n} = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} \cdot \frac{n\rho^{(n-1)}}{\rho_0^n} = C_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(n-1)}.$$

Что дает отношение текущей плотности вещества к начальной через отношение текущей скорости звука в веществе к начальной

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\left(\frac{2}{n-1}\right)}. \tag{6}$$

Равенство (6) подставляется в уравнение Зельдовича (3):

$$P = B\left[\left(\frac{C}{C_0}\right)^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)} - 1\right]. \tag{7}$$

Далее отношение (6) подставляется в уравнения сохранения массы и импульса (1, 2):

$$\frac{2}{n-1}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{n-1}C\frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

Если сложить и вычесть последние уравнения, то получим следующую систему:

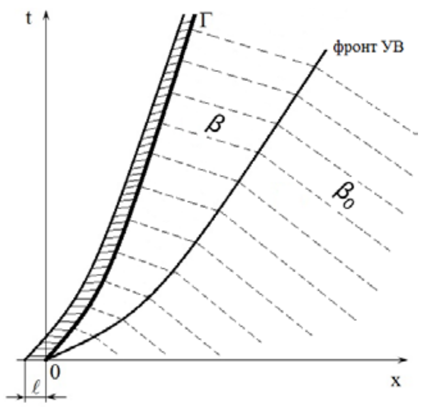
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u+\frac{2}{n-1}C\right)+(u+C)\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{2}{n-1}C\right)=0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u-\frac{2}{n-1}C\right)+(u-C)\frac{\partial}{\partial x}\left(u-\frac{2}{n-1}C\right)=0 \tag{9}$$

Уравнения (8, 9) под знаком дифференциала содержат инварианты Римана α и β, которые обладают свойством константы [2]:

$$\alpha=u+\frac{2}{n-1}C; \tag{10}$$

$$\beta=u-\frac{2}{n-1}C. \tag{11}$$



ℓ – толщина ударника

Рис.2 Диаграмма *x–t*

Поэтому их производные по времени равны нулю

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{u+C}=0;\quad \left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{u-C}=0.$$

Инварианты Римана α и β остаются постоянными вдоль линий в плоскости *x–t* с наклоном (рис.2)

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{u}_p\pm\mathrm{C},$$

где $(\mathrm{u}_p\pm\mathrm{C})$ – скорости распространения звука в веществе; u_p – скорость вещества.

В акустическом приближении, когда массовая скорость сопоставима со скоростью звука $\frac{u_p}{C}\ll 1$ (УВ слабая) на фронте УВ выполняется условие $\beta=\beta_0$. Если вещество было в невозмущенном состоянии $u_0=0$, тогда из выражения (11) получаем $\beta_0=-\frac{2}{n-1}\mathrm{C}_0$.

Таким образом, скорость вещества определяется следующим выражением:

$$\mathrm{u}=\frac{2}{\mathrm{n}-1}(\mathrm{C}-\mathrm{C}_0)$$

или

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_0}=1+\frac{\mathrm{n}-1}{2}\cdot\frac{\mathrm{u_p}}{\mathrm{C}_0}, \tag{12}$$

где u_p – скорость частицы вещества мишени, в дальнейшем обозначается „*u*”.

Наконец, чтобы получить скорость мишени, в уравнение (4) подставим выражения (7) и (12):

$$M_{\text{уд}}\frac{du}{dt}=-B\left[\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{u}{C_0}\right)^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)}-1\right], \tag{13}$$

где масса несжимаемого ударника $\mathrm{M}_{\text{уд}}$ выражена на единицу длины $\mathrm{M}_{\text{уд}}=\ell_{\text{уд}}\cdot\rho_{\text{уд}}$, а начальная плотность мишени равна плотности ударника $\rho_0=\rho_{\text{уд}}$.

В выражении (13) dt переносится в правую часть:

$$\frac{du}{\left[1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{u_{\text{уд}}}{C_0}\cdot\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right]^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)}-1}=-\frac{B}{M_{\text{уд}}}dt. \tag{14}$$

Введем параметр *A*

$$A = \frac{n-1}{2}\frac{u_{\text{уд}}}{C_0}.$$

Затем обе части дифференциального уравнения (14) умножим на отношение $\frac{\text{A}}{\text{u}_{\text{уд}}}$:

$$\frac{Ad\left(\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right)}{\left[1 + A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right]^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)} - 1} = -\frac{B}{M_{\text{уд}}} \cdot \frac{A}{u_{\text{уд}}} dt. \tag{15}$$

Интегрируя обе части равенства (15), получим

$$\int_1^{\frac{u}{u_{\text{уд}}}} \frac{d\left(A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right)}{\left[1 + A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right]^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)} - 1} = -\frac{\text{C}_0}{\ell_{\text{уд}}}\frac{n-1}{2n}\int_0^t dt. \tag{16}$$

Так как $\int_0^t dt = t$, то

$$t = -\frac{\ell_{\text{уд}}}{\text{C}_0}\frac{2n}{n-1}\int_1^{\frac{u}{u_{\text{уд}}}} \frac{d\left(A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right)}{\left[1 + A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right]^{\left(\frac{2n}{n-1}\right)} - 1} = -\frac{1}{D}\int_1^{\frac{u}{u_{\text{уд}}}} \frac{d\left(A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right)}{\left[1 + A\frac{u}{u_{\text{уд}}}\right]^{m} - 1}. \tag{17}$$

Таким образом, К. К. Крупников получил интегральное выражение для определения зависимости скорости мишени от времени (17), которое вычисляется численно.

В таблице 1 приводятся значения параметров ударника и мишени. Показатель степени n в УРСе Зельдовича (3) $P_З = 0.159[(\mu + 1)^{6.38} - 1]$ отвечает условию $P_З = P_Г$.

Табл.1. Параметры задачи

Начальная плотность ударника (мишени)	$\rho_0 = 7.85\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
Длина ударника (мишени)	$\ell_{\text{уд}} = 10$ см
Скорость ударника	$u_{\text{уд}} = 0.085\ \frac{\text{см}}{\text{мкс}}$
Ударные параметры материала мишени $u_S = C_0 + Su_p$	$C_0 = 0.3594\ \frac{\text{см}}{\text{мкс}}$; $S = 1.8297$
Параметр n, отвечающий условию $P_З = P_Г$	6.38
$A = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{u_{\text{уд}}}{C_0}$	0.6362
$B = \frac{\rho_0 C_0^2}{n}$	0.159
$m = \frac{2n}{n-1}$	2.3717
$D = \frac{\text{C}_0}{\ell_{\text{уд}}} \cdot \frac{n-1}{2n}$	0.01515

3 Численное моделирование явным методом интегрирования

3.1 Конечно-элементная модель

КЭМ расчета ударного взаимодействия жесткого ударника с металлическим стержнем с применением ПП представлена на рис.3.

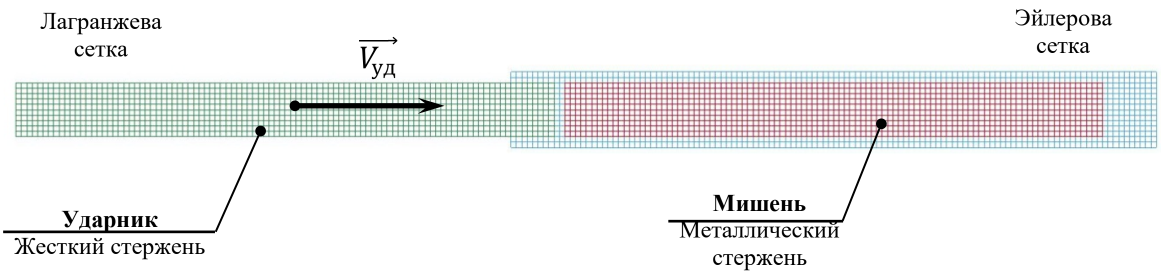


Рис.3 КЭМ ударного взаимодействия жесткого ударника и мишени
со сверхзвуковой скоростью

Ударно-волновое нагружение мишени численно моделируется в связной лагранжево-эйлеровой постановке с применением трехмерной КЭМ. Ударник моделируется лагранжевыми элементами (структурой), мишень – эйлеровыми (текучей средой). В отличие от лагранжевой сетки, где границы элемента жестко связаны с веществом, в эйлеровой – вещество свободно перемещается сквозь границы элементов. Взаимодействие структуры с текучим веществом обеспечивается контактом – лагранж-эйлерово связывание.

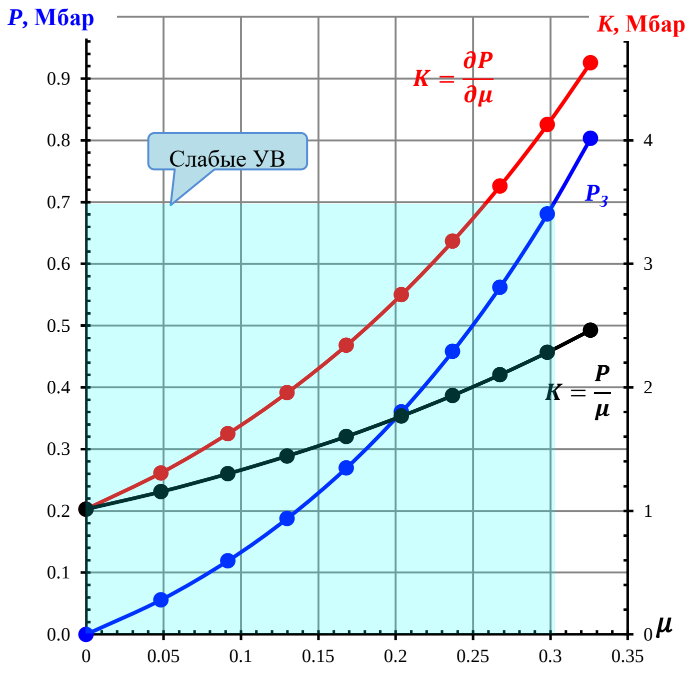


Рис.4 Графики ударного сжатия низкоуглеродистой стали

Ударник имеет свойства абсолютно жесткого тела. Мишень выполнена из низкоуглеродистой стали. В первом расчетном случае для стали используется гидродинамическая модель материала совместно с УРС Зельдовича (рис.4):

$$P_3 = 0.159[(\mu + 1)^{6.38} - 1].$$

Модуль объемного сжатия K определяется как производная давления по параметру $\mu = \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1$: $K = \frac{\partial P}{\partial \mu}$.

Данный вывод, сделанный К. К. Крупниковым, обеспечивает более высокий порядок точности решения задач ударного нагружения. Первоначальная формула $K = \frac{P}{\mu}$ приводит к ошибочным заниженным значениям давления.

Как альтернативный вариант УРС Зельдовича рассматривается уравнение Ми-Грюнайзена. В случае линейной зависимости скорости УВ $u_{УВ}$ от скорости вещества $u_ч$ ($u_{УВ} = C + S_1 u_ч$, $S_2 = S_3 = 0$) давление для сжатого материала равно:

$$p = \frac{\rho_0 C^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2}\right)\mu - \frac{a}{2}\mu^2\right]}{[1 - (S - 1)\mu]^2} + (\gamma_0 + a\mu)e.$$

Для стали приняты следующие параметры: скорость распространения звука $C = 4.57$ км/с; параметр линейной зависимости „$u_{УВ} - u_{ч}$" $S_1 = 1.49$; коэффициент Грюнайзена $\gamma_0 = 2.2$.

Гидродинамическая модель Джонсона-Кука (JC) предполагает изотропное поведение материала и пластичность по Мизесу. В модели JC упругие напряжения не рассматриваются. Напряжение текучести определяется следующим выражением:

$$\sigma = [A + B\bar{\varepsilon}^n][1 + C\ell n\dot{\varepsilon}^*][1 - T^{*m}],$$

где A, B, C, n, m – параметры материала.

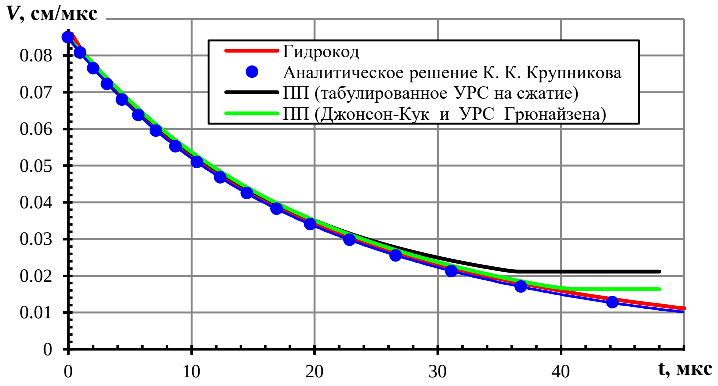
Параметры модели материала JC для низкоуглеродистой стали приведены в таблице 2.

Табл. 2 Параметры модели JC для низкоуглеродистой стали

Плотность, г/см^3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Температура плавления	Параметры модели				
			A, МПа	B, МПа	n	C	m
7.85	452	1811	175	380	0.32	0.06	0.55

4 Сопоставление результатов численных расчетов с аналитическим решением

На рис.5 представлены результаты численнных расчетов в виде графиков изменения скорости ударника от времени в условиях взаимодействия с жестким ударником со скоростью 850 м/с. Четыре расчетных случая хорошо совпадают с аналитическим решением К. К. Крупникова (точки синего цвета).



Отмечается абсолютное совпадение численного решения, полученное с применением гидрокода (красная линия), с аналитической зависимостью. Также хорошо согласуются численные решения, полученные с применением ПП (черная и зеленая линии).

Рис.5 Изменение скорости ударника от времени

Необходимо заметить, что несмотря на более простой способ описания свойств материала мишени численным массивом по сравнению с параметрическим, решения совпадают. Расхождение результатов после 35 мкс объясняется отскоком ударника от мишени, что не учитывается в аналитическом решении.

Заключение

1 К. К. Крупников получил аналитическое решение задачи ударного взаимодействия жесткого ударника с металлическим стержнем со сверхзвуковой скоростью в представлениях волновой динамики. Материал мишени описывается УРС Зельдовича.

2 Верификация численных расчетов по аналитическому решению выявила правило определения модуля объемного сжатия. Более высокий порядок точности решения обеспечивает модуль объемного сжатия, определенный К. К. Крупниковым, как производная $K = \partial P/\partial\mu$, нежели простое отношение $K = P/\mu$, которое приводит к заниженным значениям давления.

3 Определен альтернативный способ задания параметрического УРСа Зельдовича через табулированное УРС на сжатие. Достаточно задать ударную адиабату и модуль объемного сжатия численным массивом.

4 Табулированное УРС на сжатие может иметь широкое практическое применение, так как в качестве исходных данных для разного рода материалов используются имеющиеся экспериментальные ударные адиабаты.

Литература

1. Л. В. Альтшулер, К. К. Крупников, В. Е. Фортов, А. И. Фунтиков. „Начало физики мегабарных давлений” // Вестник РАН. 2004. Т. 74. № 11.1011–1022.

2. Р. Курант, К. Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Москва: Издательство иностранной литературы, 1950; 427с.

3. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец. Теория Детонации. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955; 268 с.