



РФЯЦ-ВНИИЭФ
РОСАТОМ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ЗЕМЛИ

VI международная конференция
"Забабахинские научные чтения"

29 мая -2 июня 2023 г. Снежинск, Челябинская область

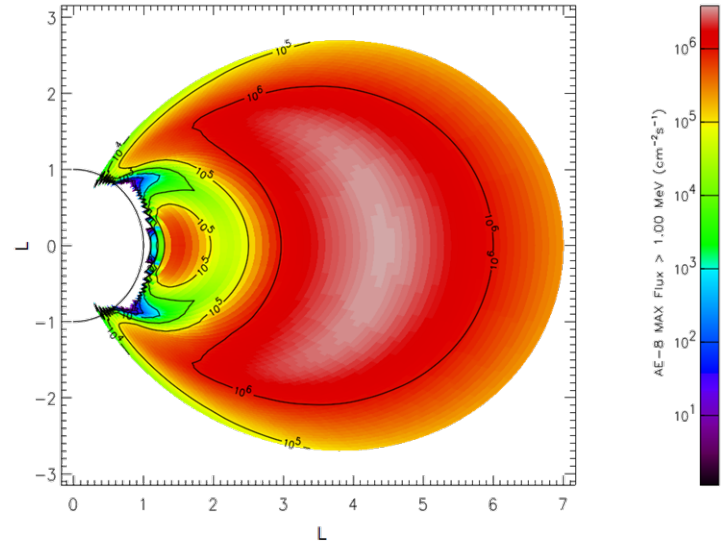
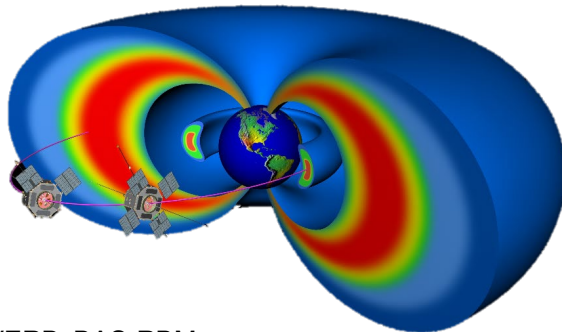
Залялов А.Н.,

Иванов Н.В.,

Широков А.Е.

Введение

- Радиационные пояса Земли (РПЗ) - основной фактор, определяющий характеристики околоземных космических аппаратов.
- При прогнозировании параметров РПЗ используются как данные космических миссий, так и методы расчетно-теоретического анализа.
- Большинство используемых численных методик усредняют параметры электронных потоков в РПЗ вдоль геомагнитных оболочек или линий. Применяются разностный¹ или стохастический подходы².



Распределение максимального всестороннего потока электронов с энергией $\epsilon > 1\text{МэВ}$, $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$

1. Salammb^o, STEERB, VERB, BAS-RBM

2. REM, UBER

Особенности представляемой методики

- Координатное пространство состоит из 5 переменных - используется приближение ведущего центра;
- Применяется метод Монте-Карло, ориентированный на использование СуперЭВМ (стандарт MPI);
- Описываются временные масштабы от долей секунды до нескольких дней;
- Учитывается торможение, рассеяние электронов РПЗ на частицах атмосферы, а также их радиальная диффузия и долготный дрейф;
- Модель геомагнитного поля представляет собой стационарный эксцентричный диполь;
- Вычисление потоков электронов РПЗ, воздействующих на спутник при его движении вдоль траектории.

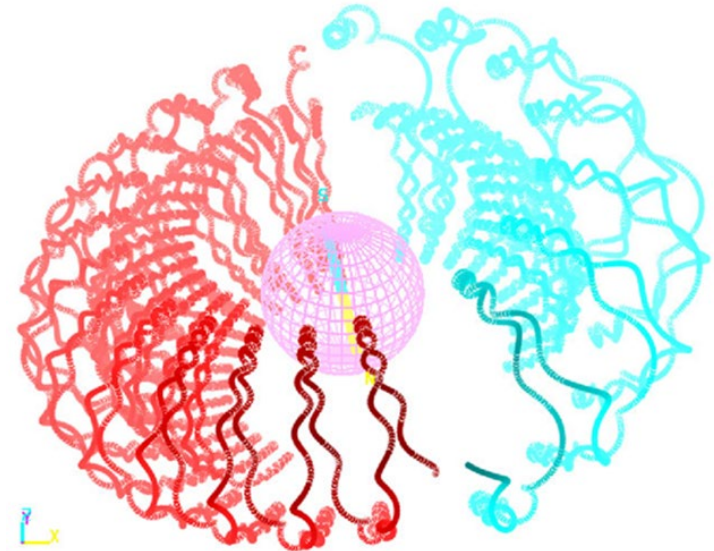
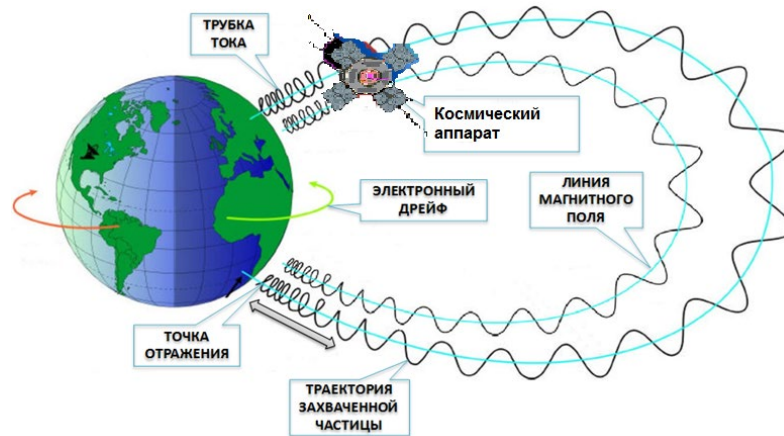
Типы движения электронов в РПЗ

Циклотронное движение вдоль геомагнитной линии ($\tau_c \sim 10^{-5}$ с);

Периодические колебания между точками отражения ($\tau_\lambda \sim 0.1$ с);

Радиальная диффузия ($\tau_L > 10^{-1} \dots 10^3$ с);

Долготный дрейф вокруг Земли ($\tau_\phi \sim 10^3$ с).



Приближение ведущего центра

- Проблема: $\omega_c = \frac{qH}{mc}$, $\tau_c \approx 10^{-5} \text{ с} \ll T$, $r_c = \frac{v}{\omega_c} \approx 10^4 \text{ см} \ll R_E$.
- Решение: вводится координата ведущего центра $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho}$, уравнение движения усредняется по периоду вращения¹.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt} \times B \right) - \frac{\mu}{m} \nabla B + O\left(\frac{\rho}{X}\right)$$

Сохраняется магнитный момент и кинетическая энергия.

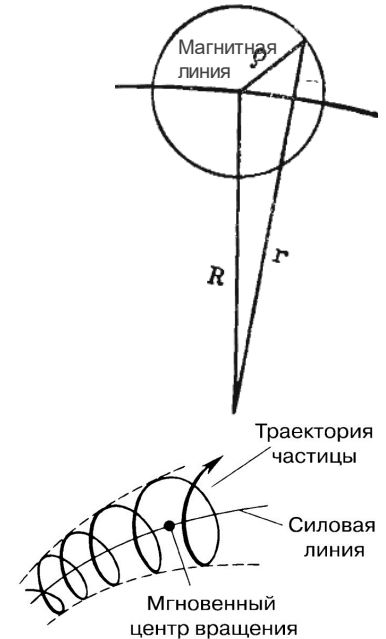
Колебания вдоль геомагнитной линии с периодом $\tau_\lambda \sim 0.1 \text{ с}$.

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = eE_\parallel - \mu \frac{\partial B}{\partial l} + \frac{m}{B} v_E \frac{dB}{dt}$$

Дрейф электронов на восток с периодом $\tau_\phi \sim 10^3 \text{ с}$.

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{B} \times \nabla B m_\beta c}{e B^3} \left(\frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2 \right)$$

- Учитывая $\tau_c \ll \tau_\lambda \ll \tau_\phi$, движение разделяется на 3 типа.



1. Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера: Атомиздат, 1972.

Модель эксцентричного магнитного диполя

Модель эксцентричного диполя определяется в географической системе координат двумя векторами.

Вектор сдвига центра диполя $\vec{b}_0^g = 0.0685 \cdot R_E \{ \sin \theta_0 \sin \phi_0, \sin \theta_0 \cos \phi_0, \cos \theta_0 \} = b_0 \vec{n}_0$

Вектор оси сдвинутого диполя $\vec{\zeta} = R_E \{ \sin \theta_1 \sin \phi_1, \sin \theta_1 \cos \phi_1, \cos \theta_1 \} = R_E \vec{\zeta}_0$

Широта и долгота точки сдвига θ_0, ϕ_0 широта и долгота направления оси диполя θ_1, ϕ_1

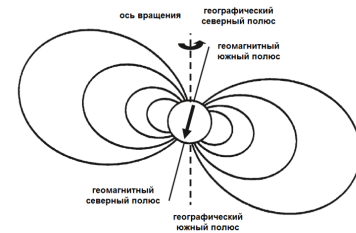
Географические координаты \vec{r}_g

Локальная с. к. с центром в точке сдвига и осью Z, направленной вдоль вектора $\vec{\xi} = \vec{\zeta}_0 - 0.0685 d_0 \cdot \vec{n}_0$

Базисные вектора $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ $\vec{b}_3 = \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}$ $\vec{b}_1 = \lambda \cdot \vec{b}_3 + d \cdot \vec{n}_0$ $\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \times (\lambda \cdot \vec{b}_3 + d \cdot \vec{n}_0) = d(\vec{b}_3 \times \vec{n}_0), \vec{b}_2^2 = 1$
 $\cos \gamma = \vec{n}_0 \cdot \vec{b}_3 = \vec{n}_0 \cdot \vec{\zeta}_0$ $\lambda = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}$ $d = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}$

Сдвиг вектора точки в центр локальной системы координат $\vec{r} = \vec{r}_g - b_0 \vec{n}_0$

Локальные декартовы координаты $\begin{cases} x = \vec{r} \cdot \vec{b}_1 \\ y = \vec{r} \cdot \vec{b}_2 \\ z = \vec{r} \cdot \vec{b}_3 \end{cases}$



Кинетическое уравнение Фоккера-Планка

- Координатное пространство состоит из 5 переменных: $s, \phi, \varepsilon, \mu, L$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} \right] f = \frac{\Lambda}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] f + \frac{\partial}{\partial L} \bigg|_{M,J} \frac{D_{LL}}{L^2} \frac{\partial}{\partial L} \bigg|_{M,J} L^2 f + Q.$$

$$f(s, \phi, \varepsilon, \mu, L, t) \equiv \frac{\delta N}{\delta s \delta \phi \delta \varepsilon \delta \mu \delta L \delta t} - \text{функция распределения электронов}$$

$L = r_0 / R_E$ - номер геомагнитной оболочки (параметр Мак-Илвайна)

S - длина геомагнитной линии

ϕ - долгота

ε - кинетическая энергия электрона

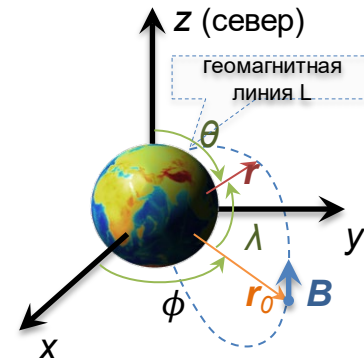
$\mu = \cos \alpha$ - косинус питч-угла

$X = \sin \lambda$ - синус геомагнитной широты

$R(s, \phi, L)$ - расстояние от точки до центра Земли

D_{LL} - коэффициент радиальной диффузии

$$\gamma = \varepsilon + 1, \beta = p / \gamma, p = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$



$$F(\varepsilon, R) = \frac{v_0 n(R) Z(R) L_e(\varepsilon, Z)}{\beta} - \text{сила торможения}$$

$$L_e(\varepsilon, Z) = \ln \frac{\varepsilon^2 (\gamma + 1)}{2 I^2(Z)} \approx 2 \ln \frac{\varepsilon}{I}$$

$$\Lambda(\varepsilon, R) = \frac{v_0 n(R) Z^2(R) L_c(\varepsilon, Z)}{\gamma^2 \beta^3} - \text{транспортная частота рассеяния}$$

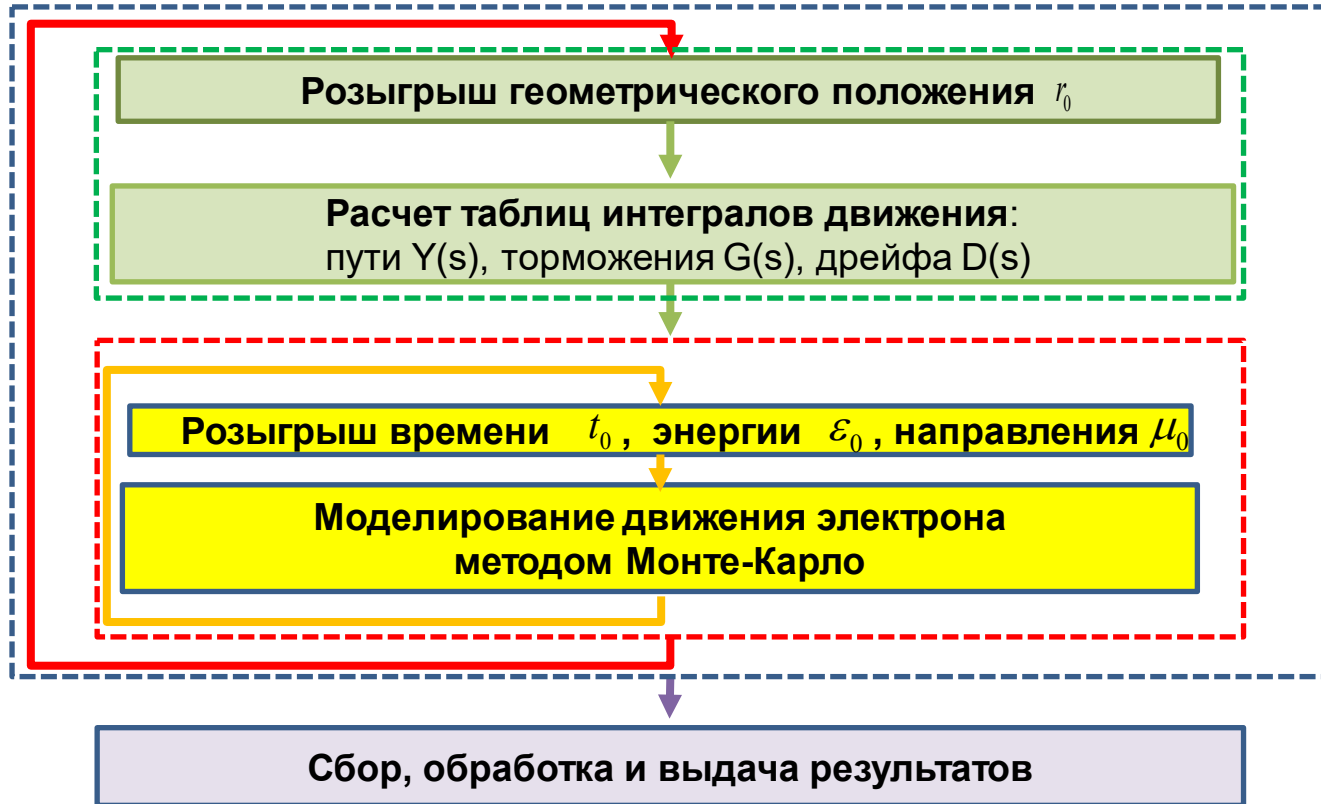
$$L_c(\varepsilon, Z) = 2 \ln \frac{242.5 \cdot p}{Z^{1/3}}$$

$$M_\infty (\gamma^2 - 1) (1 - x^2) L^3$$

- адиабатические инварианты

$$J_\infty \sqrt{\gamma^2 - 1} Y(x) L$$

Алгоритм методики



Распараллеливание: MPI.

Система уравнений движения электрона в РПЗ

Метод расщепления по физическим процессам:

- 1 этап моделируется движение электрона под действием магнитного поля с учетом силы торможения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \mu\beta, \\ \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\beta(1-\mu^2)}{2} \frac{B'(s)}{B(s)}, \\ \frac{d\phi}{dt} = -t_\phi \cdot (1+\mu^2)(1-X^4)(1+3X^2)^{-2}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -F(\varepsilon, s), \\ \frac{d\tau}{dt} = \Lambda(\varepsilon, s). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \gamma = \varepsilon + 1, \quad \beta = p / \gamma, \quad p = \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ X = \sin \lambda \quad - \text{синус геомагнитной широты} \\ t_\phi = 1.285 \cdot 10^{-5} \gamma \beta^2 (r_0 / R_E) \end{array}$$

- 2 этап моделируется рассеяние электрона

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} (1 - \hat{\mu}^2) \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} \right] q, \quad q_0(\hat{\mu}) = \delta(\hat{\mu}) \quad q(\hat{\mu}, \tau) \equiv \frac{\delta N}{\delta \hat{\mu}}$$

- 3 этап моделируется радиальная диффузия

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial L} \frac{D_{LL}}{L^2} \frac{\partial}{\partial L} L^2 \lambda, \quad \lambda_0(L) = \delta(L - L_0) \quad \lambda(L, t) \equiv \frac{\delta N}{\delta L}$$

Моделирование движения электрона под действием магнитного поля с учетом силы торможения

Движение электрона из $t_0, s_0 \Rightarrow t_1, s_1$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1 - \delta)$, $[\varepsilon_1, \varepsilon_0]$ Введем переменные: $\gamma = \varepsilon + 1$, $\eta = \gamma + 1 / \gamma$

Длина пути $\frac{dl}{dt} = \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$ Уравнение торможения $\frac{d\eta}{dt} = -\beta v_0 \bar{L}_e Z(s)n(s)$

Перейдём в уравнениях движения от времени t к координате s

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{\mu(s)}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{v_0 \bar{L}_e Z(s)n(s)}{\mu(s)}, \quad \frac{d\phi}{ds} = -\frac{\omega_d}{\beta} \frac{1 + \mu^2(s)}{\mu(s)} \frac{1 - X^4}{(1 + 3X^2)^2}, \quad \mu(s) = \sqrt{1 - a^2(1 - X^2)^{-3} \sqrt{1 + 3X^2}}, \quad a^2 = 1 - \mu_0^2.$$

$$l = l_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\mu(s)}, \quad \eta = \eta_0 - v_0 \bar{L}_e \int_{s_0}^{s_1} \frac{Z(s)n(s)ds}{\mu(s)}, \quad \phi = \phi_0 + \frac{\omega_d}{\beta} \int_{s_0}^{s_1} \frac{(1 + \mu^2(s))(1 - X^4)}{\mu(s)(1 + 3X^2)^2} ds.$$

Интеграл пути

Интеграл торможения

Интеграл дрейфа

$$Y(s) = \int_0^s \mu^{-1}(s) ds,$$

$$G(s) = \int_0^s Z(s)n(s)\mu^{-1}(s) ds,$$

$$D(s) = \int_0^s (\mu^{-1}(s) + \mu(s))(1 - X^4)(1 + 3X^2)^{-2} ds.$$

Энергия $\gamma^2 - \gamma(\gamma_0 + 1 / \gamma_0 - v_0 \bar{L}_e \Delta G) + 1 = 0$, $\Delta G = G(s_0) - G(s_1)$.

Время $t_1 = t_0 + \Delta Y / \bar{\beta}$, $\bar{\beta} = (\beta_0 + \beta) / 2$, $\Delta Y = Y(s_0) - Y(s_1)$.

Долгота $\phi_1 = \phi_0 + L \bar{\gamma} \bar{\beta} \Delta D$, $\bar{\gamma} = (\gamma_0 + \gamma) / 2$, $\Delta D = D(s_0) - D(s_1)$.

Рассеяние и радиальная диффузия

Рассеяние $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} (1 - \hat{\mu}^2) \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} \right] q, \quad q_0(\hat{\mu}) = \delta(\hat{\mu}) \quad q(\hat{\mu}, \tau) \equiv \frac{\delta N}{\delta \hat{\mu}}$

Радиальная диффузия $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial L} \frac{D_{LL}}{L^2} \frac{\partial}{\partial L} L^2 \lambda, \quad \lambda_0(L) = \delta(L - L_0) \quad \lambda(L, t) \equiv \frac{\delta N}{\delta L} \quad D_{LL} = \bar{P}_M L^{10} + \bar{P}_E L^6$

Для обеспечения сохранения адиабатических инвариантов М, J требуется дополнительный пересчет энергии и питч-угла электрона на экваториальной плоскости Земли

$$\gamma_1 = \sqrt{(\gamma_0^2 - 1) \frac{(1 - x_0^2) L_0^3}{(1 - x_1^2) L_1^3} + 1} \quad Y(x_1) = Y(x_0) (1 - x_1^2)^{1/2} (L_0 / L_1)^{-1/2} (1 - x_0^2)^{-1/2}$$

Перепишем уравнение диффузии с заменой $F = L^{-1} \quad \phi(F, t) \equiv \frac{\delta N}{\delta F}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial F} \left(D_{FF} \frac{\partial}{\partial F} \phi \right), \quad \phi_0(F) = \delta(F - F_0) \quad D_{FF} = \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)^2 D_{LL} = \frac{\bar{P}_M}{F^6} + \frac{\bar{P}_E}{F^2}$$

Используются стохастические методы решения, где $W_{\hat{\mu}}$ и W_F независимые винеровские процессы.

$$d\hat{\mu} = b_{\hat{\mu}} d\tau + \sigma_{\hat{\mu}} dW_{\hat{\mu}} \quad b_{\hat{\mu}} = \frac{\partial(1 - \hat{\mu}^2)}{\partial \hat{\mu}} = -2\hat{\mu} \quad \sigma_{\hat{\mu}} = \sqrt{2(1 - \hat{\mu}^2)} \quad \mu = \hat{\mu} \mu_0 + \sqrt{(1 - \hat{\mu}^2)(1 - \mu_0^2)} \cos \hat{\phi}$$

$$dF = b_F dt + \sigma_F dW_F \quad b_F = \frac{\partial D_{FF}}{\partial F} = -6 \frac{\bar{P}_M}{F^7} - 2 \frac{\bar{P}_E}{F^3} = -6 \bar{P}_M L^7 - 2 \bar{P}_E L^3 \quad \sigma_F = \sqrt{2 D_{FF}} = \sqrt{2 \left(\frac{\bar{P}_M}{F^6} + \frac{\bar{P}_E}{F^2} \right)} = \sqrt{2(\bar{P}_M L^6 + \bar{P}_E L^2)}$$

$$\bar{P}_M = \frac{R_E}{c} \frac{10^{0.506 Kp - 9.325}}{24 \cdot 3600} P_M \quad \bar{P}_E = \frac{R_E}{c} \frac{c^2 \tilde{E}^2}{4 R_E^2 B_E^2} \frac{T_d}{1 + (\omega_d T_d / 2)^2} P_E$$

Расчет характеристик воздействия РПЗ на спутники

Табличное задание траектории спутника: $\vec{r}(t) = \{\phi(t), X(t), L(t)\}$, $\phi(t)$ долгота, $X(t)$ синус широты, $\Delta t_s = 1$ [сек]

Источник разбивается на группы по L статистическим весом $W(L)$ и распределением $n_L(t, \phi, X, \mu, \varepsilon)$

Интегральный по энергии всесторонний поток - $J_L(t, \phi, X) = \int d\varepsilon \int_{-1}^1 v n_L(t, \phi, X, \mu, \varepsilon) d\mu$

Поток на спутнике вдоль траектории $R(T) = \int_0^T W(L(t)) J_L(t, \phi(t), X(t)) dt \Rightarrow R(T) = \Delta t_s \cdot \sum_{i=1}^{[T/\Delta t_s]} W(L_{i+1/2}) \cdot J_{L_{i+1/2}}(t_{i+1/2}, \phi_{i+1/2}, X_{i+1/2})$

Проблема - методом Монте-Карло тяжело считать потоки в точках $(t_{i+1/2}, \phi_{i+1/2}, X_{i+1/2})$

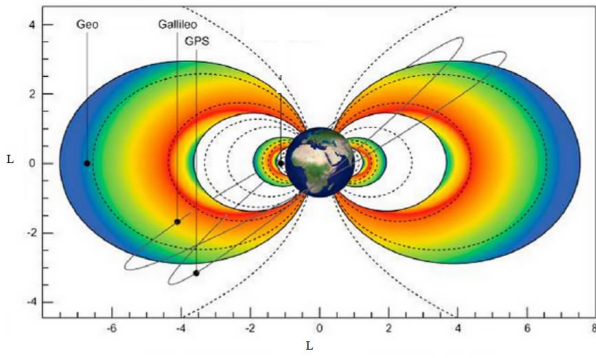
Решение - интегрально средние значения в областях $[t_i, t_{i+1}] \times O_{i+1/2}$

$$R(T) \approx \sum_{i=1}^{[T/\Delta t_s]} \frac{W(L_{i+1/2})}{\Delta \phi_{i+1/2} \Delta X_{i+1/2}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{O_{i+1/2}} J_{L_{i+1/2}}(t, \phi, X) dX d\phi dt$$

$$O_{i+1/2}(X) = [X_{i+1/2}^-, X_{i+1/2}^+] \quad X_{i+1/2}^- = \min\{X_i, X_{i+1}\} \quad X_{i+1/2}^+ = \max\{X_i, X_{i+1}\}$$

$$O_{i+1/2}(\phi) = [\phi_{i+1/2}^-, \phi_{i+1/2}^+] \quad \phi_{i+1/2}^- = \min\{\phi_i, \phi_{i+1}\} \quad \phi_{i+1/2}^+ = \max\{\phi_i, \phi_{i+1}\}$$

$$\Delta X_{i+1/2} = X_{i+1/2}^+ - X_{i+1/2}^- \quad \Delta \phi_{i+1/2} = \phi_{i+1/2}^+ - \phi_{i+1/2}^-$$



Тестирование методики (радиальная диффузия)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{P_M}{F^6} \frac{\partial \phi}{\partial F} \right), \quad \phi(F, t=0) = \delta(F - F_0), \quad \phi(F = -\infty, t) = 0, \quad \phi(F = +\infty, t) = 0, \quad F_0 = \frac{1}{5}, \quad P_M = 0.00233.$$

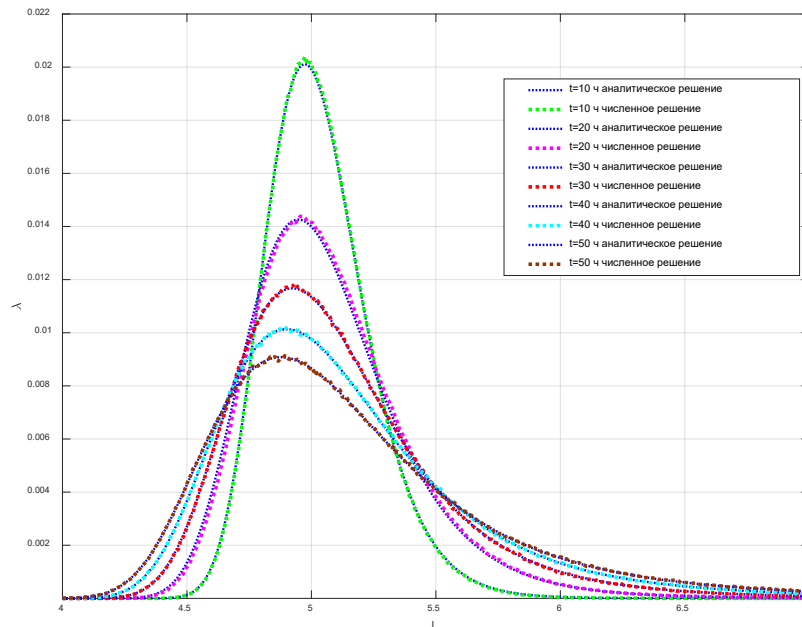
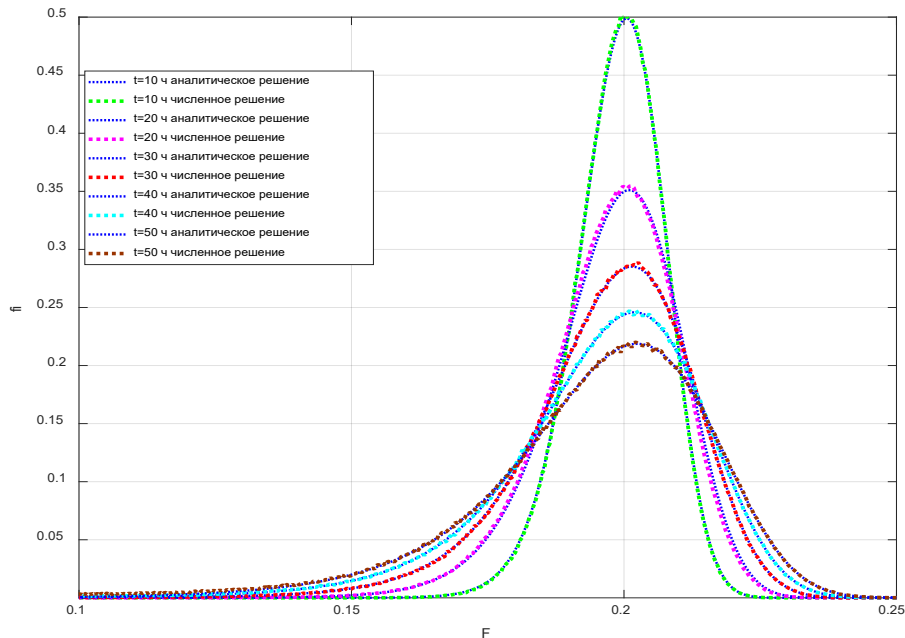
Точечный источник электронов над экватором $L=5$.

Аналитическое решение для уравнения диффузии

$$\phi = \frac{\delta N}{\delta F} \quad F = L^{-1}$$

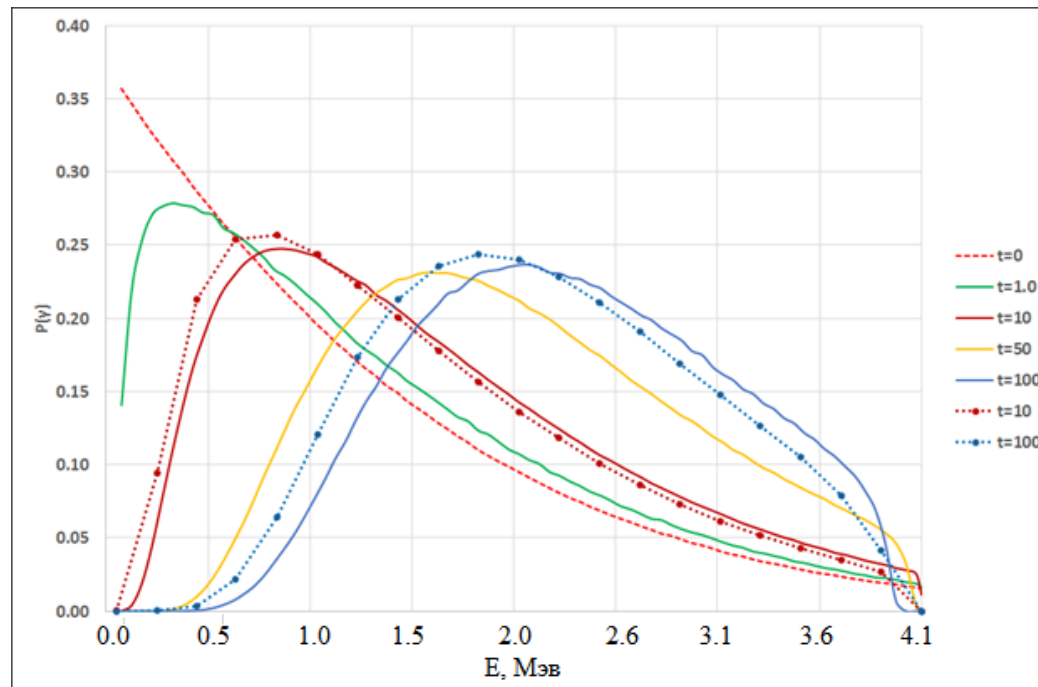
$$\phi(F, \tau = tP_M) = \frac{(F F_0)^{7/2}}{8(\tau - \tau_0)} \exp \left[-\frac{(F)^8 + (F_0)^8}{8^2(\tau - \tau_0)} \right] I_{|\mu|} \left[\frac{2(F F_0)^{8/2}}{8^2(\tau - \tau_0)} \right] H(\tau - \tau_0)$$

$$\lambda = \frac{\delta N}{\delta L}$$



Тестирование методики (торможение)

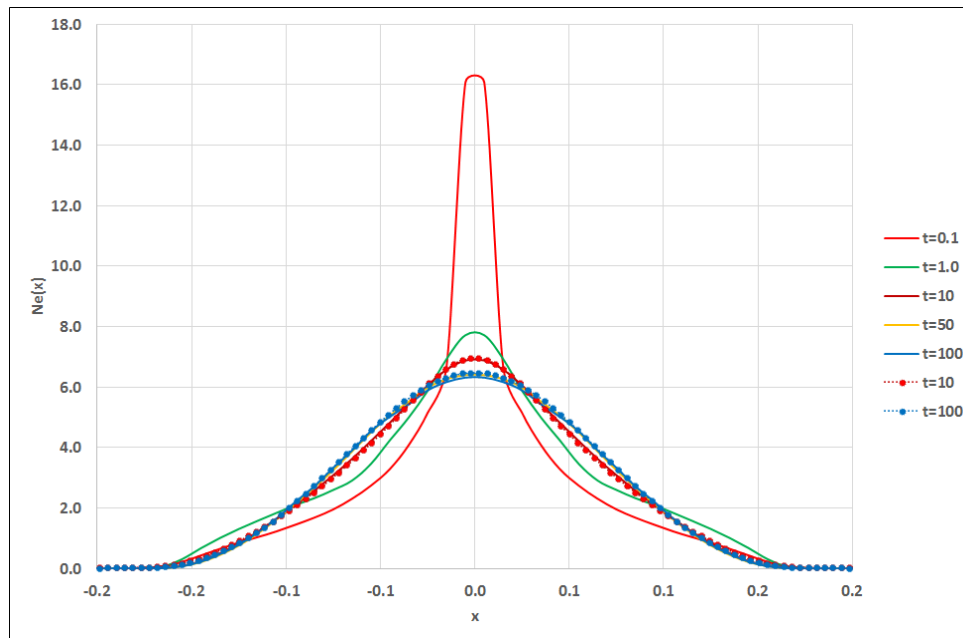
Точечный источник электронов над экватором, $L=1.3$



Интегральный спектр электронов на разные моменты времени. Время в секундах.
 Результаты по разностной методике (авторы: Грошев Е.В., Жмайло В.А.) отмечены пунктиром с точками.

Тестирование методики (рассеяние)

Точечный источник
 электронов над
 экватором, $L=1.3$



Распределение концентрации электронов на экваторе по синусу широты X на разные моменты времени. Время в секундах.

Результаты по разностной методике (авторы: Грошев Е.В., Жмайло В.А.) отмечены пунктиром с точками.

Заключение

- Представлена стохастическая методика численного моделирования динамики релятивистских электронов РПЗ в приближении ведущего центра.
- Методика позволяет вести расчеты движения электронов с учетом их торможения, рассеяния на частицах атмосферы, а также радиальной диффузии и долгого дрейфа.
- Результатами являются энергетические и пространственно-временные распределения характеристик электронов в РПЗ, а также параметры их потоков на космических аппаратах.
- Проведено тестирование методики, результаты показывают корректность ее реализации.
- Данную методику предполагается использовать в интересах исследований физических процессов в РПЗ и для защиты спутников от электронов РПЗ.

Спасибо за внимание

Залялов Адель Наильевич
ВНИИЭФ

01.06.2023

