Асимптотические решения уравнения Больцмана и турбулентность

С. А. Серов

Забабахинские Научные Чтения 2023

Содержание

В 1912 году Гильберт в [1], гл. XXII, как пример интегрального уравнения, рассмотрел кинетическое уравнение Больцмана для однокомпонентного газа и предложил «рецепт» его приближенного (асимптотического) решения. «Рецепт» Гильберта был неудобен для практического применения, поскольку пять произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей нужно было находить, решая дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения газовой динамики первого и более высоких порядков). Пять лет спустя Энског в своей диссертации предложил использовать нулевые условия, условия (56)-(58) ниже с нулевыми правыми частями, для определения пяти произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей. Наложение нулевых условий фактически приводит к использованию различных шкал сравнения в асимптотическом разложении функции распределения скоростей и в асимптотических разложениях плотности числа частиц, средней (массовой) скорости и температуры, получающимся из асимптотического разложения функции распределения скоростей интегрированием по скоростям с различными весовыми функциями. Нарушение логики метода последовательных приближений (приравнивать нужно переменные коэффициенты при одинаковых членах единой шкалы сравнения) проявилось в том, что, в результате, временные производные в необходимых условиях существования решений интегральных уравнений высших порядков, см. ниже, оказываются равными нулю, а с ними оказались бы равными нулю члены газодинамических уравнений, соответствующие вязкости, теплопроводности, ... Энског «улучшил» положение введением (см., например, [2],

гл. 7, § 1, п. 5) необоснованного разложения частной производной по времени.
Подход Струминского, предложившего в 1974 году в [3] свой метода приближенного (асимптотического) решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентного газа, отличается от подхода Энскога к асимптотическому решению системы уравнений Больцмана для газовой смеси тем, как вводится параметр малости в систему уравнений Больцмана для газовой смеси, т.е. решение строится в другом асимптотическом пределе. Можно отметить, что близкие к предложенному Струминским подходы к приближенному решению системы кинетических уравнений Больцмана ранее рассматривались в кинетической теории плазмы, см., например, [4], § 7.5. Метод же решения системы кинетических уравнений у Струминского, по существу, тот же, что и у

Энскога: как и Энског, Струминский использует разложение частной производной по времени.
В современных работах по кинетической теории газов, – см., например, [5], [6] и имеющиеся там ссылки, – (возможно, чтобы не рассматривать разложение производной по времени) алгоритм асимптотического решения системы кинетических уравнений Больцмана часто формулируют не полностью (аналогично [2], гл. 7), рассматривая только нулевое и первое приближение для функций распределения скоростей. Но в таком случае авторы подобных работ не могут утверждать, что они рассматривают асимптотическое решение системы кинетических уравнений Больцмана.

Будем рассматривать *асимптотические разложения с переменными коэффициентами* физических величин относительно *шкалы сравнения*, состоящей из целых степеней θ – $\{\theta^r\}_{r\geq 0}$, когда θ стремится к 0. Переменные коэффициенты асимптотических разложений в общем случае могут зависеть от θ, но у нас переменные коэффициенты асимптотических разложений предполагаются зависящими от $\boldsymbol{r}$ и t и независящими от θ. Для доказательства *единственности* рассматриваемых нами асимптотических разложений с переменными коэффициентами с заданной точностью θ^r относительно шкалы сравнения $\{\theta^r\}_{r\geq 0}$, если они существуют, достаточно предполагать *ограниченность* (не обязательно равномерную) переменных коэффициентов асимптотических разложений (а также, при необходимости, их примитивных и производных) во всей области изменения $\boldsymbol{r}$ и t. Полученное при $\theta \to 0$ асимптотическое решение является *точным*, по крайней

мере, при $\theta = 0$, поэтому удобно рассматривать именно асимптотические разложения при $\theta \to 0$ (и целые $r \geq 0$).
В приложениях теории асимптотических разложений при решении методом последовательных приближений физических уравнений удобно не выделять безразмерный параметр θ^r из члена асимптотического разложения $\theta^r K^{(r)}(x)$, как действительно малый множитель, а использовать θ^r как *индикатор порядка малости* соответствующего (бесконечно) малого переменного коэффициента $K^{(r)}(x)$, полагая в конечных выражениях $\theta = 1$; при таком соглашении формальный «малый» параметр θ можно вводить в некоторое уравнение произвольным образом, однако, смысл получающихся асимптотических решений такого уравнения с малым параметром определяется физической обоснованностью введения малого параметра в исходное уравнение.

Критика метода последовательных приближений в [9], гл. V, § 2 и [10], гл. IV, § 7.1, возможно, отражает неудовлетворённость авторов введением разложения частной производной по времени в методе Энскога асимптотического решения кинетического уравнения Больцмана, см. ниже. Гильберт, отмечая в [1], гл. XXII, что разложение функции распределения скоростей

$$F = \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + X\lambda + \cdots \qquad (1)$$

есть степенной ряд по (малому параметру) λ, удовлетворяющий уравнению Больцмана, и такой, что выражения [ср. с (49)-(52) и (53)-(55) ниже]

$$\int \psi^{(i)} F\, d\omega = \frac{1}{\lambda}\int \psi^{(i)}\Phi\, d\omega + \int \psi^{(i)}\Psi\, d\omega + \lambda\int \psi^{(i)} X\, d\omega + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2)$$

при $t = t_0$ переходят в степенные ряды

$$\Lambda^{(i)} = \frac{f^{(i)}}{\lambda} + g^{(i)} + \lambda h^{(i)} + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{3}$$

в завершающей работу теореме сформулировал «рецепт» получения (асимптотического) решения уравнения Больцмана, в котором предложил пять произвольных функциональных параметров функций $\Phi, \Psi, X \ldots$ определять «*из пяти дифференциальных уравнений в частных производных*» [аналогичных (81), (98) ниже], «*причём при* $t = t_0$» положить

$$\int \psi^{(i)} \Phi \, d\omega = \lambda \Lambda^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{4}$$

$$\int \psi^{(i)} \Psi \, d\omega = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{5}$$

$$\int \psi^{(i)} X \, d\omega = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{6}$$

В обозначениях из (41), (49)-(58) ниже, Гильберт предложил просто задать специальные *начальные значения*

$$n\left(\boldsymbol{r},t_0\right)=n^{(0)}\left(\boldsymbol{r},t_0\right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{r},t_0\right)=\boldsymbol{u}^{(0)}\left(\boldsymbol{r},t_0\right), \tag{8}$$

$$T\left(\boldsymbol{r},t_0\right)=T^{(0)}\left(\boldsymbol{r},t_0\right) \tag{9}$$

или

$$\int \psi^{(l)} f^{(r)}\, d\boldsymbol{c}\Big|_{t=t_0} \overset{\boldsymbol{r}}{\equiv} 0 \qquad (l=1,2,3) \tag{10}$$

для $r=1,2\ldots$.
Для дальнейшего обоснования теории газов желательно было дополнить теорему Гильберта явными выражениями пяти произвольных функциональных параметров найденных на r-ом шаге $(r=0,1,2\ldots)$ метода последовательных приближений

функций $f_i^{(r)}$ через физические параметры газа [см. (87)-(89), (104)-(106) ниже]; Гильберт этого не сделал.
Энског доформулировал «рецепт» Гильберта. Однако при этом Энског допустил логическую ошибку. Он использовал нулевые условия (10) *тождественно*, при любом t, а не только при $t = t_0$ (см. [2], гл. 7, § 1, п. 1):

$$\int \psi^{(l)} f^{(r)}\, d\boldsymbol{c} \overset{\boldsymbol{r},t}{\equiv} 0 \qquad (l = 1, 2, 3) \tag{11}$$

для $r = 1, 2 \ldots$. С точки зрения теории асимптотических разложений Энског [вместо (53)-(55) ниже] положил

$$n\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) = \theta^{\,0}\, n\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) + \theta^1\, 0 + \theta^2\, 0 + \cdots\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) = \theta^{\,0}\, \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) + \theta^1\, 0 + \theta^2\, 0 + \cdots\,, \tag{13}$$

$$T\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) = \theta^{\,0}\, T\,(\boldsymbol{r}, t, \theta) + \theta^1\, 0 + \theta^2\, 0 + \cdots\,, \tag{14}$$

то есть Энског в методе последовательных приближений одновременно использовал различные шкалы сравнения $\{n(\theta), \theta^1, \theta^2 \ldots\}$, $\{\boldsymbol{u}(\theta), \theta^1, \theta^2 \ldots\}$, $\{T(\theta), \theta^1, \theta^2 \ldots\}$, что ошибочно.

Нарушение логики метода последовательных приближений немедленно проявляется в том, что в системах газодинамических уравнений $(r+1)$-ого порядка [аналогичных (81) $(r = 1, 2, \ldots)$ ниже, необходимых условиях существования решений интегральных уравнений высших порядков в подходе Энскога], в силу (11), пропадают частные производные по времени

$$\int \psi^{(l)} \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} d\boldsymbol{c} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^{(l)} f^{(r)} d\boldsymbol{c} = 0 \qquad (l = 1, 2, 3), \qquad (15)$$

а с ними оказываются равными нулю члены газодинамических уравнений, соответствующие вязкости, теплопроводности, ...

Отсюда, как в доказательстве теоремы от противного, Энског должен был бы сделать вывод о некорректности использования условий (11), вместо этого Энског предложил использовать ничем не обоснованное формальное разложение частной производной по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{r=0}^{\infty} \theta^r \frac{\partial_r}{\partial t}. \tag{16}$$

Пример Вейерштарсса:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 3^n x}{2^n}, \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos 3^n x. \tag{18}$$

Вейерштрасс показал, что функция S не имеет производной ни при каком значении x.

Систему уравнений Больцмана, описывающую изменение зависящих от времени t и пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, функций $f_i\,(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}_i)$ распределения скоростей $\boldsymbol{c}_i$ частиц i-ой компоненты смеси разреженных одноатомных газов за счёт столкновения с частицами других компонент смеси {см. [2], гл. 8, (1.1); обсуждение вывода системы уравнений Больцмана и области её применимости см., например, в [2], гл. 3 и 18 и [11], гл. 7, § 1, [12], гл. 3, а также во включённой в [2] в качестве дополнения работе Боголюбова [13]; ниже рассматриваются только *центральные взаимодействия* молекул, когда сила, с которой каждая из них действует на другую, направлена вдоль линии, соединяющей центры молекул}, можно записать в виде:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{c}_i} = \sum_{j \in N} \iiint \left(f_i' f_j' - f_i f_j \right) g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_j$$

$$= \sum_{j \in N} \iint \left(f_i' f_j' - f_i f_j \right) k_{ij}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_j \qquad (i \in N); \tag{19}$$

в (19) N – множество индексов, нумерующих компоненты смеси; $\boldsymbol{X}_i$ – внешняя сила, действующая на молекулу i-ого сорта; m_i – масса молекулы i-ого сорта; g_{ij} – модуль относительной скорости $\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j$ сталкивающихся частиц; b – прицельное расстояние, ϵ – азимутальный угол, $\mathbf{k}$ – вектор единичной длины, направленный в центр масс сталкивающихся частиц из точки их наибольшего сближения – см. [2], гл. 3, рисунок 3; скалярная функция $k_{ij}\left(\boldsymbol{g}_{ij},\mathbf{k}\right)$ определяется равенством

$$g_{ij}\,b\,db\,d\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} k_{ij}\,d\mathbf{k}; \tag{20}$$

штрихом в (19) и ниже обозначаются скорости и функции скоростей после столкновения.
Введём обозначения:

$$J_i\left(f_i,f\right) = \iint \left(f_i f - f_i' f'\right) k_i\,d\mathbf{k}\,d\boldsymbol{c}, \tag{21}$$

$$J_{ij}\left(f_i,f_j\right) = \iint \left(f_i f_j - f_i' f_j'\right) k_{ij}\,d\mathbf{k}\,d\boldsymbol{c}_j; \tag{22}$$

чтобы различать скорости сталкивающихся молекул одного сорта в (21) одна скорость обозначается через $\boldsymbol{c}_j$, а другая –

через $\boldsymbol{c}$ (без индекса) и опущен индекс у соответствующей функции распределения скоростей f.
В подходе Энскога малыми считаются дифференциальные части уравнений Больцмана (19), обозначаемые ниже $\mathcal{D}_i f_i$, по сравнению с правыми частями уравнений (19) – см. [2], гл. 7, § 1, п. 5, – поэтому в систему уравнений Больцмана формально вводится индикатор малости θ следующим образом:

$$\theta \mathcal{D}_i f_i = -\sum_j J_{ij}\left(f_i, f_j\right) \qquad (i \in N). \tag{23}$$

В подходе Струминского к асимптотическому решению системы уравнений Больцмана малыми предполагаются дифференциальные части уравнений Больцмана (19) и интегралы столкновений частиц i-ой компоненты с частицами других компонент по сравнению с интегралом столкновений частиц i-ой компоненты между собой, поэтому в систему уравнений Больцмана индикатор малости θ вводится иначе:

$$\theta \mathcal{D}_i f_i = -J_i\left(f_i, f\right) - \theta \sum_{j \neq i} J_{ij}\left(f_i, f_j\right) \qquad (i \in N). \tag{24}$$

Можно объединить подходы Энскога и Струминского. Для этого разобьём множество компонент смеси N на два подмножества: подмножество компонент, которые условно назовём *внутренними* (можно было бы рассмотреть случай, когда подмножеств внутренних компонент несколько, но такой случай ничем принципиально не отличается от рассматриваемого ниже, только обозначения становятся ещё более громоздкими), и подмножество компонент, которые назовём *внешними*. Чтобы различать эти две группы компонент смеси, подмножество индексов внутренних компонент $\hat{N}$ и сами индексы внутренних компонент $\hat{i} \in \hat{N}$ будем отмечать значком

«$\hat{}$», а подмножество индексов внешних компонент $\check{N}$ и сами индексы внешних компонент $\check{i} \in \check{N}$ будем отмечать значком «$\check{}$»; пересечение множеств $\hat{N}$ и $\check{N}$ пусто – $\hat{N} \cap \check{N} = \emptyset$, а объединение этих множеств есть множество индексов всех компонент смеси $\hat{N} \cup \check{N} = N$; если некоторое утверждение относится, как к внутренним, так и внешним компонентам, то значки «$\hat{}$» и «$\check{}$» будут опускаться. В новых обозначениях система уравнений Больцмана может быть записана в виде:

$$\theta \mathcal{D}_{\hat{i}} f_{\hat{i}} = -\sum_{\hat{j} \in \hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}, f_{\hat{j}} \right) - \theta \sum_{\check{j} \in \check{N}} J_{\hat{i}\check{j}} \left(f_{\hat{i}}, f_{\check{j}} \right) \quad \left(\hat{i} \in \hat{N} \right), \tag{25a}$$

$$\theta \mathcal{D}_{\check{i}} f_{\check{i}} = -J_{\check{i}} \left(f_{\check{i}}, f \right) - \theta \sum_{j \neq \check{i}} J_{\check{i}j} \left(f_{\check{i}}, f_j \right) \quad \left(\check{i} \in \check{N} \right). \tag{25b}$$

Запишем асимптотическое разложение функции распределения скоростей частиц i-ой компоненты f_i в виде формального ряда последовательных приближений по степеням θ:

$$f_i = f_i^{(0)} + \theta f_i^{(1)} + \theta^2 f_i^{(2)} + \cdots . \tag{26}$$

Дифференциальные части уравнений (25) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i f_i &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i} \right) \left(f_i^{(0)} + \theta f_i^{(1)} + \cdots \right) \\ &= \mathcal{D}_i^{(0)} + \theta \mathcal{D}_i^{(1)} + \theta^2 \mathcal{D}_i^{(2)} + \cdots , \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\mathcal{D}_i^{(r)} = \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial \boldsymbol{c}_i} \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots), \tag{28}$$

– ср. с [2], гл. 7, § 1, п.п. 4, 5 и [3]. В (27)-(28) не используется разложение частной производной по времени (16), как это было сделано Энскогом, а вслед за ним Струминским. В результате описываемый ниже метод решения системы уравнений Больцмана принципиально отличается от методов Энскога и Струминского.
Подставляя (26) и (27) в (25а) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ, получаем систему уравнений метода последовательных приближений для нахождения функций распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(r)}$, которую с учётом обозначений (21), (22) и (28) можно записать в виде:

$$\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right) = 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{29}$$

$$\mathcal{D}_{\hat{i}}^{(r-1)} + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right) + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}}\sum_{s=1}^{r-1} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r-s)}, f_{\hat{j}}^{(s)}\right) + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(r)}\right) + \sum_{\check{j}\in\check{N}}\sum_{s=0}^{r-1} J_{\hat{i}\check{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r-1-s)}, f_{\check{j}}^{(s)}\right) = 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N},\ r=1,2\ldots\right). \tag{30}$$

Аналогично, подставляя (26) и (27) в (25b) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ, получаем систему уравнений метода последовательных приближений для нахождения функций распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\check{i}}^{(r)}$:

$$J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(0)}\right) = 0 \qquad \left(\check{i}\in\check{N}\right), \tag{31}$$

$$\mathcal{D}_{\check{i}}^{(r-1)} + J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(r)}, f^{(0)}\right) + \sum_{s=1}^{r-1} J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(r-s)}, f^{(s)}\right) + J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(r)}\right)$$

$$+ \sum_{j \neq \check{i}} \sum_{s=0}^{r-1} J_{\check{i}j}\left(f_{\check{i}}^{(r-1-s)}, f_j^{(s)}\right) = 0 \qquad (\check{i} \in \check{N},\ r = 1, 2 \ldots). \quad (32)$$

В оригинальных работах Гильберта [1] и Энскога (см. [2], гл. 7, § 1, п. 4) непосредственно в уравнение Больцмана формальный параметр θ не вводился, но в ряд последовательных приближений для функции распределения скоростей параметр θ вводился иначе, чем в (26):

$$f_i^{\text{H, E}} = \frac{1}{\theta} f_i = \frac{1}{\theta} f_i^{(0)} + f_i^{(1)} + \theta f_i^{(2)} + \cdots; \qquad (33)$$

очевидно, с тем же результатом можно для функции распределения скоростей использовать разложение (26), но в

уравнение Больцмана вводить множитель θ, как в (23). Вычисленные в рамках подхода Энскога последовательные приближения $f_i^{(0)}, f_i^{(1)}, f_i^{(2)} \ldots$ оказываются упорядоченными по (обратной) *плотности числа молекул* смеси n: $f_i^{(0)}$ пропорционально n, $f_i^{(1)}$ напрямую не зависит от n и т.д. Тем самым появляется физическое обоснование использования метода последовательных приближений для нахождения асимптотического решения уравнения Больцмана. Для подхода Струминского малую физическую переменную, по степеням которой строится асимптотические разложения, явно определить затруднительно.
Ниже, говоря о порядке приближения, будем считать порядок приближения равным значению индекса r в (30), (32). В нулевом приближении, согласно (22), (29), имеем следующую систему интегральных уравнений для нахождения функций

распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(0)}$:

$$\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right)$$
$$= \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint \left(f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} - f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} = 0 \quad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right). \tag{34}$$

В кинетической теории газов часто используется равенство:

$$\iiiint \phi_i f_i' f_j'\, g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \iiiint \phi_i' f_i f_j\, g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \tag{35}$$

– в (35), как и в (19), штрихом обозначаются скорости и функции скоростей после столкновения. Всякому процессу столкновения двух молекул газа, переводящему скорости этих молекул до столкновения $\boldsymbol{c}_i$, $\boldsymbol{c}_j$ в $\boldsymbol{c}_i'$, $\boldsymbol{c}_j'$ взаимно однозначно соответствует процесс столкновения, переводящий $\boldsymbol{c}_i', \boldsymbol{c}_j' \to -\boldsymbol{c}_i', -\boldsymbol{c}_j' \to -\boldsymbol{c}_i, -\boldsymbol{c}_j \to \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j$, причём для рассматриваемых здесь центральных взаимодействий из закона сохранения энергии следует, что модули относительных скоростей молекул до и после столкновения равны

$$g_{ij} = g_{ij}', \tag{36}$$

а из закона сохранения момента импульса следует, что равны также и прицельные расстояния

$$b = b' \tag{37}$$

для этих процессов столкновений; поэтому равенство (35) непосредственно следует из равенства единице якобиана преобразования нештрихованных скоростей в штрихованные,

оно не зависит от вида функций ϕ, f, необходимо только, чтобы интегралы были определены и сходились – ср. с [2], гл. 3, § 5, п. 3.
Следуя идее Гекке (см. [1], гл. XXII), умножим уравнения (34) на $\ln f_{\hat{i}}$, проинтегрируем по $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, просуммируем по $\hat{i}$ и преобразуем интегралы с учётом (20), (35), получим:

$$\frac{1}{4}\sum_{\hat{i},\hat{j}\in\hat{N}}\iiint \ln\left(\frac{f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)}}{f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime}}\right)\left(f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} - f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} = 0. \quad (38)$$

Подынтегральные выражения в (38) не могут быть (строго) меньше нуля, поэтому сумма в (38) может быть равна нулю только при условии (предполагается, что все рассматриваемые функции непрерывны в каждой точке их области определения) обращения в нуль всех подынтегральных выражений для всех значений переменных интегрирования, т.е.

$$f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime} \equiv f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \tag{39}$$

или, что то же самое,

$$\ln f_{\hat{i}}^{(0)\prime} + \ln f_{\hat{j}}^{(0)\prime} - \ln f_{\hat{i}}^{(0)} - \ln f_{\hat{j}}^{(0)} \equiv 0. \tag{40}$$

Следовательно, $\ln f_{\hat{i}}^{(0)}$ должен выражаться линейно через *аддитивные инварианты* столкновения

$$\psi_i^{(1)} = m_i, \tag{41a}$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^{(2)} = m_i \boldsymbol{c}_i, \tag{41b}$$

$$\psi_i^{(3)} = \frac{1}{2} m_i c_i^2; \tag{41c}$$

для столкновения $\hat{i}$-ой молекулы с $\hat{j}$-ой молекулой сохранение инварианта столкновения $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$ выражается равенством:

$$\psi_{\hat{i}}^{(l)\prime} + \psi_{\hat{j}}^{(l)\prime} - \psi_{\hat{i}}^{(l)} - \psi_{\hat{j}}^{(l)} = 0 \qquad (l = 1, 2, 3). \tag{42}$$

Линейная комбинация аддитивных инвариантов $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$ является аддитивным инвариантом. Других, линейно независимых от $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$, зависящих от скоростей молекул аддитивных инвариантов столкновения не существует: шесть скалярных неизвестных, компонент скоростей двух молекул после столкновения $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}^{\prime}$, $\boldsymbol{c}_{\hat{j}}^{\prime}$, полностью определяются через шесть известных компонент скоростей этих молекул до столкновения $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, $\boldsymbol{c}_{\hat{j}}$ двумя свободными геометрическими параметрами, задающими столкновение, например, прицельным расстоянием b и азимутальным углом ϵ (см. выше), что даёт два уравнения связи, и из четырёх скалярных уравнений (42), соответствующих сохранению энергии и трёх компонент импульса; существование же линейно независимого от $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$ зависящего от скоростей молекул аддитивного инварианта столкновения давало бы аналогичное (42) лишнее уравнение связи скоростей молекул после столкновения со скоростями молекул до столкновения.

Таким образом,

$$\ln f_{\hat{i}}^{(0)} = \alpha_{\hat{i}}^{(1,0)} + \boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,0)} \cdot m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} + \alpha_{\hat{}}^{(3,0)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} c_{\hat{i}}^{2}, \tag{43}$$

где $\alpha_{\hat{i}}^{(1,0)}$ и $\alpha_{\hat{}}^{(3,0)}$ – некоторые не зависящие от $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$ скалярные функции пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и времени t, а $\boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,0)}$ – векторная функция $\boldsymbol{r}$

и t [из уравнений (42) для $l = 2, 3$ следует, что функции $\boldsymbol{\alpha}^{(2,0)}_{\hat{}}$ и $\alpha^{(3,0)}_{\hat{}}$ одни и те же для всех внутренних компонент смеси]. Или

$$\ln f^{(0)}_{\hat{i}} = \ln \alpha^{(0,0)}_{\hat{i}} + \alpha^{(3,0)}_{\hat{}} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} + \boldsymbol{\alpha}^{(2,0)}_{\hat{}} \Big/ \alpha^{(3,0)}_{\hat{}} \right)^2, \qquad (44)$$

где $\alpha^{(0,0)}_{\hat{i}}$ – новая скалярная функция $\boldsymbol{r}$ и t. Т.е. общее решение системы уравнений (34) можно записать в виде множества функций Максвелла:

$$f^{(0)}_{\hat{i}} = \beta^{(1,0)}_{\hat{i}} \left(\frac{m_{\hat{i}}}{2\pi \beta^{(3,0)}_{\hat{}}} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{\beta}^{(2,0)}_{\hat{}} \right)^2}{2\beta^{(3,0)}_{\hat{}}}} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N} \right), \qquad (45)$$

$$\beta_{\hat{i}}^{(1,0)} = \alpha_{\hat{i}}^{(0,0)} \left(-\frac{2\pi}{m_{\hat{i}} \alpha_{\hat{}}^{(3,0)}} \right)^{3/2}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,0)} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,0)}}{\alpha_{\hat{}}^{(3,0)}}, \tag{47}$$

$$\beta_{\hat{}}^{(3,0)} = -\frac{1}{\alpha_{\hat{}}^{(3,0)}}. \tag{48}$$

По определению вводим плотность числа частиц i-ой компоненты n_i, среднюю массовую скорость $\boldsymbol{u}_{\hat{}}$ и температуру

$T_{\hat{}}$ внутренних компонент смеси:

$$n_i \overset{\text{def}}{=} \int f_i \, d\boldsymbol{c}_i, \tag{49}$$

$$\boldsymbol{u}_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} m_{\hat{i}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}, \tag{50}$$

$$\frac{3}{2} T_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}\right)^2 f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}. \tag{51}$$

Из (49)-(51) получаем равенство:

$$\frac{3}{2} T_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} + \frac{1}{2} u_{\hat{}}^2 \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} m_{\hat{i}} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \frac{1}{2} m_{\hat{i}} c_{\hat{i}}^2 f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}, \tag{52}$$

которое удобно использовать в дальнейшем вместо определения (51).

Вместе с асимптотическим разложением (26) в соответствии с определениями (49), (50), (52) *необходимо* определить асимптотические разложения для плотности числа частиц n_i i-ой компоненты

$$n_i = n_i^{(0)} + \theta n_i^{(1)} + \theta^2 n_i^{(2)} + \cdots , \tag{53}$$

средней массовой скорости $\boldsymbol{u}_{\hat{}}$

$$\boldsymbol{u}_{\hat{}} = \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} + \theta \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(1)} + \theta^2 \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(2)} + \cdots \tag{54}$$

и температуры $T_{\hat{}}$ внутренних компонент смеси

$$T_{\hat{}} = T_{\hat{}}^{(0)} + \theta T_{\hat{}}^{(1)} + \theta^2 T_{\hat{}}^{(2)} + \cdots . \tag{55}$$

Подставляя (26) и (53)-(55) в (49), (50), (52) и приравнивая члены одного порядка малости, получаем $\mathrm{Card}\left(\hat{N}\right) + 4$

скалярных соотношений, связывающих асимптотические разложения (26) и (53)-(55):

$$\int f_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = n_{\hat{i}}^{(r)} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{56}$$

$$\sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} f_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \left(n_{\hat{i}} \boldsymbol{u}_{\hat{}}\right)^{(r)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \sum_{s=0}^{r} n_{\hat{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}$$
$$= \sum_{s=0}^{r} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}, \tag{57}$$

$$\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}\int\frac{1}{2}m_{\hat{i}}c_{\hat{i}}^2 f_{\hat{i}}^{(r)}d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}=\frac{3}{2}\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}\left(n_{\hat{i}}T_{\hat{}}\right)^{(r)}+\frac{1}{2}\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}m_{\hat{i}}\Big(n_{\hat{i}}u_{\hat{}}^2\Big)^{(r)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}\sum_{s=0}^{r}n_{\hat{i}}^{(r-s)}T_{\hat{}}^{(s)}+\frac{1}{2}\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}m_{\hat{i}}\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}n_{\hat{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{s=0}^{r}\hat{n}^{(r-s)}T_{\hat{}}^{(s)}+\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)}. \tag{58}$$

В (57), (58) введены обозначения

$$\hat{\rho}^{(r-s)}=\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}m_{\hat{i}}n_{\hat{i}}^{(r-s)}, \tag{59}$$

$$\hat{n}^{(r-s)}=\sum_{\hat{i}\in\hat{N}}n_{\hat{i}}^{(r-s)}. \tag{60}$$

В частности, для $r = 0$ из (56)-(58) получаем выражения фигурирующих в (45) произвольных функций $\beta_{\hat{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\beta_{\hat{}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ через нулевые приближения к локальным значениям плотности числа частиц $\hat{i}$-ой компоненты, средней массовой скорости и температуры внутренних компонент смеси:

$$\beta_{\hat{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t) = n_{\hat{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{61a}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{61b}$$

$$\beta_{\hat{}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t) = T_{\hat{}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{61c}$$

Согласно (21), (31), интегральные уравнения нулевого приближения, из которых находятся функции распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\check{i}}^{(0)}$:

$$J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(0)}\right) = \iint \left(f_{\check{i}}^{(0)} f^{(0)} - f_{\check{i}}^{(0)\prime} f^{(0)\prime}\right) k_i \, d\mathbf{k} \, d\boldsymbol{c} = 0 \quad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \text{(62)}$$

– проще уравнений (34) и фактически отличаются от (34) только отсутствием суммирования по компонентам. Поэтому, аналогично (45), общее решение системы уравнений (62) можно записать в виде множества функций Максвелла:

$$f_{\check{i}}^{(0)} = \beta_{\check{i}}^{(1,0)} \left(\frac{m_{\check{i}}}{2\pi\beta_{\check{i}}^{(3,0)}}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\check{i}}\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}\right)^2}{2\beta_{\check{i}}^{(3,0)}}} \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \qquad \text{(63)}$$

где $\beta_{\check{i}}^{(1,0)}$ и $\beta_{\check{i}}^{(3,0)}$ – некоторые, не зависящие от $\boldsymbol{c}_{\check{i}}$, скалярные функции пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и времени t, а $\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}$ – векторная функция $\boldsymbol{r}$ и t.

Дополним определение плотности числа частиц i-ой компоненты (49) определениями средней скорости $\boldsymbol{u}_{\check{i}}$ и температуры $T_{\check{i}}$ внешней компоненты смеси:

$$\boldsymbol{u}_{\check{i}} n_{\check{i}} m_{\check{i}} \stackrel{\text{def}}{=} \int m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}, \tag{64}$$

$$\frac{3}{2} T_{\check{i}} n_{\check{i}} \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{1}{2} m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}\right)^2 f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}; \tag{65}$$

из (49), (64), (65) получаем равенство:

$$\frac{3}{2} T_{\check{i}} n_{\check{i}} + \frac{1}{2} u_{\check{i}}^2 n_{\check{i}} m_{\check{i}} = \int \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2 f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}, \tag{66}$$

которое удобно использовать в дальнейшем вместо определения (65).
Введём аналогичные (54)-(55) асимптотические разложения средней скорости $\boldsymbol{u}_{\check{i}}$ $\check{i}$-ой внешней компоненты

$$\boldsymbol{u}_{\check{i}} = \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} + \theta \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(1)} + \theta^2 \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(2)} + \cdots \tag{67}$$

и температуры $T_{\check{i}}$ $\check{i}$-ой внешней компоненты

$$T_{\check{i}} = T_{\check{i}}^{(0)} + \theta T_{\check{i}}^{(1)} + \theta^2 T_{\check{i}}^{(2)} + \cdots . \tag{68}$$

Подставляя (26), (53), (67), (68) в (49), (64), (66) и приравнивая члены одного порядка малости, получаем для каждого значения индекса $\check{i}$ 5 (скалярных) соотношений, связывающих асимптотические разложения (26), (53), (67), (68):

$$\int f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = n_{\check{i}}^{(r)}, \tag{69}$$

$$\int m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = m_{\check{i}} \left(n_{\check{i}} \boldsymbol{u}_{\check{i}}\right)^{(r)} = m_{\check{i}} \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}$$
$$= \sum_{s=0}^{r} \rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}, \tag{70}$$

$$\int \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2 f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = \frac{3}{2} \left(n_{\check{i}} T_{\check{i}}\right)^{(r)} + \frac{1}{2} m_{\check{i}} \left(n_{\check{i}} u_{\check{i}}^2\right)^{(r)}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} T_{\check{i}}^{(s)} + \frac{1}{2} m_{\check{i}} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} n_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} T_{\check{i}}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)}, \qquad (71)$$

ср. с (56)-(58). В (70), (71) использовано обозначение

$$\rho_{\check{i}}^{(r-s)} = m_{\check{i}} n_{\check{i}}^{(r-s)}. \qquad (72)$$

Для $r = 0$ из (69)-(71) получаем выражения фигурирующих в (63) произвольных функций $\beta_{\check{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\beta_{\check{i}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ через нулевые приближения к локальным значениям плотности числа частиц, средней скорости и температуры $\check{i}$-ой внешней компоненты смеси:

$$\beta_{\check{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r},t) = n_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{73a}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{73b}$$

$$\beta_{\check{i}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r},t) = T_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{73c}$$

Для $r \geq 1$ функции распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(r)}$ находятся из системы интегральных уравнений (30), которую с учётом (22) и (39) можно переписать в виде

$$\mathcal{D}_{\hat{i}}^{(r-1)} + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \sum_{s=1}^{r-1} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(r-s)}, f_{\hat{j}}^{(s)} \right) + \sum_{\check{j}\in\check{N}} \sum_{s=0}^{r-1} J_{\hat{i}\check{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(r-1-s)}, f_{\check{j}}^{(s)} \right)$$

$$= -\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(0)} \chi_{\hat{i}}^{(r)}, f_{\hat{j}}^{(0)} \right) - \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)} \chi_{\hat{j}}^{(r)} \right)$$

$$= -\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\chi_{\hat{i}}^{(r)} + \chi_{\hat{j}}^{(r)} - \chi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \chi_{\hat{j}}^{(r)\prime} \right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \quad \left(\hat{i} \in \hat{N} \right), \quad (74)$$

в (74) функции $f_{\hat{i}}^{(r)}$ записаны как $f_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \chi_{\hat{i}}^{(r)}$, где $\chi_{\hat{i}}^{(r)}$ – новые неизвестные функции.

Левые части уравнений (74) содержат функции, известные с предыдущего шага метода последовательных приближений.

Неизвестные функции $\chi_{\hat{i}}^{(r)}$ входят, линейно, только в правую часть уравнений (74). Поэтому общее решение системы уравнений (30) есть семейство функций вида $\{f_{\hat{i}}^{(r)} = \Xi_{\hat{i}}^{(r)} + \xi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, где $\{\Xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)}\,\mathit{\Phi}_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, $\{\xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)}\phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, семейство функций $\{\mathit{\Phi}_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ – некоторое частное решение системы неоднородных уравнений (74), а семейство функций $\{\phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ – общее решение системы однородных интегральных уравнений

$$0 = \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\phi_{\hat{i}}^{(r)} + \phi_{\hat{j}}^{(r)} - \phi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \phi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \quad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right). \tag{75}$$

Если умножить уравнения (75) на $\phi_{\hat{i}}^{(r)}$, проинтегрировать по всем значениям $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, просуммировать по $\hat{i}$ и преобразовать интегралы, как это было сделано при выводе (38), то получим:

$$\frac{1}{4}\sum_{\hat{i},\hat{j}\in\hat{N}}\iiint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)}\left(\phi_{\hat{i}}^{(r)}+\phi_{\hat{j}}^{(r)}-\phi_{\hat{i}}^{(r)\prime}-\phi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right)^2 k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}}=0. \quad (76)$$

Из (76) заключаем, ср. с (38) и (43), что $\phi_{\hat{i}}^{(r)}$ являются линейными комбинациями аддитивных инвариантов столкновения $\psi_{i}^{(l)}$ $(l=1,2,3)$:

$$\phi_{\hat{i}}^{(r)}=\alpha_{\hat{i}}^{(1,r)}+\boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,r)}\cdot m_{\hat{i}}\boldsymbol{c}_{\hat{i}}+\alpha_{\hat{}}^{(3,r)}\frac{1}{2}m_{\hat{i}}c_{\hat{i}}^2, \qquad (77)$$

где $\alpha_{\hat{i}}^{(1,r)}$ и $\alpha_{\hat{}}^{(3,r)}$ – некоторые, не зависящие от $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, скалярные функции пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и времени t, а $\boldsymbol{\alpha}^{(2,r)}_{\hat{}}$ – векторная функция $\boldsymbol{r}$ и t (как и выше, произвольные функции $\boldsymbol{\alpha}^{(2,r)}_{\hat{}}$ и $\alpha^{(3,r)}_{\hat{}}$ одинаковы для всех внутренних компонент смеси), и, следовательно,

$$\xi^{(r)}_{\hat{i}} = f^{(0)}_{\hat{i}} \left(\alpha^{(1,r)}_{\hat{i}} + \boldsymbol{\alpha}^{(2,r)}_{\hat{}} \cdot m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} + \alpha^{(3,r)}_{\hat{}} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} c^2_{\hat{i}} \right). \qquad (78)$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления в соответствии с выражением для $f^{(0)}_{\hat{i}}$, см. (45) и (61), перепишем (78) в виде

$$\xi^{(r)}_{\hat{i}} = f^{(0)}_{\hat{i}} \left[\beta^{(1,r)}_{\hat{i}} + \boldsymbol{\beta}^{(2,r)}_{\hat{}} \cdot m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \right) + \beta^{(3,r)}_{\hat{}} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \right)^2 \right], \qquad (79)$$

где $\beta^{(1,r)}_{\hat{i}}$, $\boldsymbol{\beta}^{(2,r)}_{\hat{}}$ и $\beta^{(3,r)}_{\hat{}}$ – новые функции $\boldsymbol{r}$ и t.

Семейство функций $\{\chi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ является решением системы неоднородных интегральных уравнений

$$F_{\hat{i}}^{(r)} = \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\chi_{\hat{i}}^{(r)} + \chi_{\hat{j}}^{(r)} - \chi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \chi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \quad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \quad (80)$$

где $F_{\hat{i}}^{(r)}$ обозначают взятые с обратным знаком левые части уравнений (74).

Умножая уравнения (80) на $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$ $(l = 1, 2, 3)$, интегрируя по всем значениям $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$ и преобразуя интегралы аналогично тому, что выше, мы получим, в силу (42), как необходимое условие существования решений системы интегральных уравнений (80), необходимость выполнения равенств:

$$\int \psi_{\hat{i}}^{(1)} F_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = 0 \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{81a}$$

$$\sum_{\hat{i} \in \hat{N}} \int \psi_{\hat{i}}^{(l)} F_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = 0 \qquad (l = 2, 3). \tag{81b}$$

Среди (бесконечного) множества частных решений системы уравнений (80), отличающихся друг от друга на некоторое решение системы однородных уравнений (75), можно выделить единственное решение $\{\Phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i} \in \hat{N}}$ такое, что

$$\int \psi_{\hat{i}}^{(1)} f_{\hat{i}}^{(0)} \Phi_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = 0 \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{82a}$$

$$\sum_{\hat{i} \in \hat{N}} \int \psi_{\hat{i}}^{(l)} f_{\hat{i}}^{(0)} \Phi_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = 0 \qquad (l = 2, 3). \tag{82b}$$

Подставив выражение для $f_{\hat{i}}^{(r)}$ $\left(\hat{i} \in \hat{N}\right)$

$$f_{\hat{i}}^{(r)} = \Xi_{\hat{i}}^{(r)} + \xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \Phi_{\hat{i}}^{(r)}$$

$$+f_{\hat{i}}^{(0)} \left[\beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,r)} \cdot m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right) + \beta_{\hat{}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)^2\right] \quad (83)$$

в (56)-(58), с учётом (45), (59)-(61) и (82) получим систему $\mathrm{Card}\left(\hat{N}\right) + 4$ алгебраических уравнений [уравнений связи асимптотических разложений (26) и (53)-(55)]:

$$n_{\hat{i}}^{(0)} \beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \frac{3}{2} n_{\hat{i}}^{(0)} T_{\hat{}}^{(0)} \beta_{\hat{}}^{(3,r)} = n_{\hat{i}}^{(r)} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \qquad (84)$$

$$\boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} m_{\hat{i}} n^{(0)}_{\hat{i}} \beta^{(1,r)}_{\hat{i}} + \hat{\rho}^{(0)} T^{(0)}_{\hat{}} \boldsymbol{\beta}^{(2,r)}_{\hat{}} + \frac{3}{2} \hat{\rho}^{(0)} T^{(0)}_{\hat{}} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \beta^{(3,r)}_{\hat{}} = \sum_{s=0}^{r} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}^{(s)}_{\hat{}}, \qquad (85)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} n^{(0)}_{\hat{i}} \left[3T^{(0)}_{\hat{}} + m_{\hat{i}} \left(u^{(0)}_{\hat{}} \right)^2 \right] \beta^{(1,r)}_{\hat{i}} + \hat{\rho}^{(0)} T^{(0)}_{\hat{}} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(2,r)}_{\hat{}} + \frac{3}{4} T^{(0)}_{\hat{}} \left[5\hat{n}^{(0)} T^{(0)}_{\hat{}} + \hat{\rho}^{(0)} \left(u^{(0)}_{\hat{}} \right)^2 \right] \beta^{(3,r)}_{\hat{}} = \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r} \hat{n}^{(r-s)} T^{(s)}_{\hat{}} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}^{(s-q)}_{\hat{}} \cdot \boldsymbol{u}^{(q)}_{\hat{}}, \qquad (86)$$

из которой находим выражения функций $\beta_{\hat{i}}^{(1,r)}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,r)}(\boldsymbol{r},t)$ и $\beta_{\hat{}}^{(3,r)}(\boldsymbol{r},t)$ через (переменные) коэффициенты асимптотических разложений плотности числа частиц $\hat{i}$-ой компоненты, средней массовой скорости и температуры внутренних компонент смеси

$$\beta_{\hat{i}}^{(1,r)} = \frac{n_{\hat{i}}^{(r)}}{n_{\hat{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}T_{\hat{}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{n}^{(r-s)}T_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{n}^{(r)}T_{\hat{}}^{(0)}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}T_{\hat{}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)} - \hat{\rho}^{(r)}\left(u_{\hat{}}^{(0)}\right)^{2}\right]$$
$$+\frac{1}{\hat{n}^{(0)}T_{\hat{}}^{(0)}}\,\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{\rho}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right], \qquad (87)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(2,r)}_{\hat{}} = \frac{1}{\hat{\rho}^{(0)} T^{(0)}_{\hat{}}} \left[\sum_{s=0}^{r} \left(\hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}^{(s)}_{\hat{}} \right) - \hat{\rho}^{(r)} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \right], \qquad (88)$$

$$\begin{aligned} \beta^{(3,r)}_{\hat{}} = {} & \frac{1}{\hat{n}^{(0)} \left(T^{(0)}_{\hat{}} \right)^2} \left[\sum_{s=0}^{r} \left(\hat{n}^{(r-s)} T^{(s)}_{\hat{}} \right) - \hat{n}^{(r)} T^{(0)}_{\hat{}} \right] \\ & + \frac{1}{3} \frac{1}{\hat{n}^{(0)} \left(T^{(0)}_{\hat{}} \right)^2} \left[\sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}^{(s-q)}_{\hat{}} \cdot \boldsymbol{u}^{(q)}_{\hat{}} - \hat{\rho}^{(r)} \left(u^{(0)}_{\hat{}} \right)^2 \right] \\ & - \frac{2}{3} \frac{1}{\hat{n}^{(0)} \left(T^{(0)}_{\hat{}} \right)^2} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \cdot \left[\sum_{s=0}^{r} \left(\hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}^{(s)}_{\hat{}} \right) - \hat{\rho}^{(r)} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \right]. \qquad (89) \end{aligned}$$

Выполнение равенств (81) тогда можно рассматривать, как дифференциальные уравнения, уравнения газовой динамики

r-ого порядка, для нахождения $n_{\hat{i}}^{(r-1)}$, $\boldsymbol{u}_{\hat{i}}^{(r-1)}$, $T_{\hat{i}}^{(r-1)}$ $(r = 1, 2 \ldots)$.
Для $r = 1$ из (87)-(89) имеем

$$\beta_{\hat{i}}^{(1,1)} = \frac{n_{\hat{i}}^{(1)}}{n_{\hat{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\frac{T_{\hat{}}^{(1)}}{T_{\hat{}}^{(0)}}, \tag{90}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,1)} = \frac{\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(1)}}{T_{\hat{}}^{(0)}}, \tag{91}$$

$$\beta_{\hat{}}^{(3,1)} = \frac{1}{T_{\hat{}}^{(0)}}\frac{T_{\hat{}}^{(1)}}{T_{\hat{}}^{(0)}}. \tag{92}$$

Частное решение системы неоднородных интегральных уравнений (80) $\{\Phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, удовлетворяющее (82), можно построить, например, с помощью разложения $\Phi_{\hat{i}}^{(r)}(\boldsymbol{c}_{\hat{i}})$ в ряд по полиномам Сонина с зависящими от $\boldsymbol{r}$ и t коэффициентами разложения (см. [2] или [11]); такое построение доказывает существование решений системы интегральных уравнений (74) (можно было бы просто использовать здесь и выше теоремы Фредгольма [14], [15]).

Функции распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\check{i}}^{(r)}$ для $r \geq 1$ находятся из системы интегральных уравнений (32), которую с учётом (21) и аналогичного (39) равенства

$$f_{\check{i}}^{(0)\prime} f^{(0)\prime} \equiv f_{\check{i}}^{(0)} f^{(0)} \tag{93}$$

можно переписать в виде

$$\mathcal{D}_{\check{i}}^{(r-1)} + \sum_{s=1}^{r-1} J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(r-s)}, f^{(s)}\right) + \sum_{j\neq\check{i}}\sum_{s=0}^{r-1} J_{\check{i}j}\left(f_{\check{i}}^{(r-1-s)}, f_j^{(s)}\right)$$

$$= -J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}\chi_{\check{i}}^{(r)}, f^{(0)}\right) - J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(0)}\chi^{(r)}\right)$$

$$= -\iint f_{\check{i}}^{(0)} f^{(0)}\left(\chi_{\check{i}}^{(r)} + \chi^{(r)} - \chi_{\check{i}}^{(r)\prime} - \chi^{(r)\prime}\right) k_{\check{i}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c} \qquad (\check{i}\in\check{N}), \quad (94)$$

в (94) $f_{\check{i}}^{(r)} = f_{\check{i}}^{(0)}\chi_{\check{i}}^{(r)}$, где $\chi_{\check{i}}^{(r)}$ – новые неизвестные функции. Уравнения (94) отличаются от уравнений (74) только левыми частями, известными с предыдущего шага метода последовательных приближений, и отсутствием суммирования по компонентам в правых частях уравнений (94). Поэтому аналогично тому, как это было сделано выше для внутренних компонент, получаем выражение для общего решения соответствующей (94) системы однородных интегральных уравнений

$$\phi_{\check{i}}^{(r)} = \alpha_{\check{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\alpha}_{\check{i}}^{(2,r)} \cdot m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} + \alpha_{\check{i}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2, \tag{95}$$

Следовательно,

$$\xi_{\check{i}}^{(r)} = f_{\check{i}}^{(0)} \left(\alpha_{\check{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\alpha}_{\check{i}}^{(2,r)} \cdot m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} + \alpha_{\check{i}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2 \right) \tag{96}$$

или

$$\xi_{\check{i}}^{(r)} = f_{\check{i}}^{(0)} \left[\beta_{\check{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,r)} \cdot m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right) + \beta_{\check{i}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right)^2 \right]. \tag{97}$$

Необходимое условие существования решений системы интегральных уравнений (94) можно записать в виде

$$\int \psi_{\check{i}}^{(l)} F_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = 0 \qquad \left(\check{i} \in \check{N},\ l = 1, 2, 3 \right), \tag{98}$$

где $F_{\check{i}}^{(r)}$ обозначают взятые с обратным знаком левые части уравнений (94).
Среди (бесконечного) множества частных решений системы уравнений (94) условием

$$\int \psi_{\check{i}}^{(l)} f_{\check{i}}^{(0)} \Phi_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = 0 \qquad \left(\check{i} \in \check{N},\ l = 1, 2, 3\right) \tag{99}$$

можно выделить единственное решение $\{\Phi_{\check{i}}^{(r)}\}_{\check{i} \in \check{N}}$. Подставив выражение для $f_{\check{i}}^{(r)}$ $\left(\check{i} \in \check{N}\right)$

$$f_{\check{i}}^{(r)} = \Xi_{\check{i}}^{(r)} + \xi_{\check{i}}^{(r)} = f_{\check{i}}^{(0)} \Phi_{\check{i}}^{(r)}$$
$$+ f_{\check{i}}^{(0)} \left[\beta_{\check{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,r)} \cdot m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right) + \beta_{\check{i}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)^2\right] \tag{100}$$

в (69)-(71), с учётом (63), (72)-(73) и (99) для каждого индекса $\breve{i}$ получим систему из 5 алгебраических уравнений [уравнений связи асимптотических разложений (26) и (53), (67)-(68)]:

$$n_{\breve{i}}^{(0)} \beta_{\breve{i}}^{(1,r)} + \frac{3}{2} n_{\breve{i}}^{(0)} T_{\breve{i}}^{(0)} \beta_{\breve{i}}^{(3,r)} = n_{\breve{i}}^{(r)}, \tag{101}$$

$$\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)} m_{\breve{i}} n_{\breve{i}}^{(0)} \beta_{\breve{i}}^{(1,r)} + \rho_{\breve{i}}^{(0)} T_{\breve{i}}^{(0)} \boldsymbol{\beta}_{\breve{i}}^{(2,r)} + \frac{3}{2} \rho_{\breve{i}}^{(0)} T_{\breve{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)} \beta_{\breve{i}}^{(3,r)} = \sum_{s=0}^{r} \rho_{\breve{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(s)}, \tag{102}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} n_{\breve{i}}^{(0)} \left[3T_{\breve{i}}^{(0)} + m_{\breve{i}} \left(u_{\breve{i}}^{(0)} \right)^2 \right] \beta_{\breve{i}}^{(1,r)} \\
&\quad + \rho_{\breve{i}}^{(0)} T_{\breve{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\breve{i}}^{(2,r)} \\
&\quad + \frac{3}{4} T_{\breve{i}}^{(0)} \left[5 n_{\breve{i}}^{(0)} T_{\breve{i}}^{(0)} + \rho_{\breve{i}}^{(0)} \left(u_{\breve{i}}^{(0)} \right)^2 \right] \beta_{\breve{i}}^{(3,r)} \\
= &\frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r} n_{\breve{i}}^{(r-s)} T_{\breve{i}}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \rho_{\breve{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(q)}, \qquad (103)
\end{aligned}
$$

из которой найдём выражения функций $\beta_{\breve{i}}^{(1,r)}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\breve{i}}^{(2,r)}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\beta_{\breve{i}}^{(3,r)}(\boldsymbol{r}, t)$ через (переменные) коэффициенты асимптотических разложений плотности числа частиц $\check{i}$-ой компоненты, средней скорости и температуры $\check{i}$-ой компоненты

$$\beta_{\check{i}}^{(1,r)} = \frac{n_{\check{i}}^{(r)}}{n_{\check{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}T_{\check{i}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(n_{\check{i}}^{(r-s)}T_{\check{i}}^{(s)}\right) - n_{\check{i}}^{(r)}T_{\check{i}}^{(0)}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}T_{\check{i}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\rho_{\check{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)} - \rho_{\check{i}}^{(r)}\left(u_{\check{i}}^{(0)}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}T_{\check{i}}^{(0)}}\,\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\rho_{\check{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}\right) - \rho_{\check{i}}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right], \qquad (104)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,r)} = \frac{1}{\rho_{\check{i}}^{(0)}T_{\check{i}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\rho_{\check{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}\right) - \rho_{\check{i}}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right], \qquad (105)$$

$$\beta_{\check{i}}^{(3,r)} = \frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}\left(T_{\check{i}}^{(0)}\right)^2}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(n_{\check{i}}^{(r-s)}T_{\check{i}}^{(s)}\right) - n_{\check{i}}^{(r)}T_{\check{i}}^{(0)}\right]$$
$$+\frac{1}{3}\frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}\left(T_{\check{i}}^{(0)}\right)^2}\left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\rho_{\check{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)} - \rho_{\check{i}}^{(r)}\left(u_{\check{i}}^{(0)}\right)^2\right]$$
$$-\frac{2}{3}\frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)}\left(T_{\check{i}}^{(0)}\right)^2}\,\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\rho_{\check{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}\right) - \rho_{\check{i}}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right]. \quad (106)$$

Выполнение равенств (98) можно рассматривать, как дифференциальные уравнения, уравнения газовой динамики r-ого порядка, для нахождения $n_{\check{i}}^{(r-1)}$, $\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(r-1)}$, $T_{\check{i}}^{(r-1)}$ $(r = 1, 2\ldots)$.

Для $r = 1$ из (104)-(106), в частности, имеем:

$$\beta_{\breve{i}}^{(1,1)} = \frac{n_{\breve{i}}^{(1)}}{n_{\breve{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\frac{T_{\breve{i}}^{(1)}}{T_{\breve{i}}^{(0)}}, \tag{107}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\breve{i}}^{(2,1)} = \frac{\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(1)}}{T_{\breve{i}}^{(0)}}, \tag{108}$$

$$\beta_{\breve{i}}^{(3,1)} = \frac{1}{T_{\breve{i}}^{(0)}}\frac{T_{\breve{i}}^{(1)}}{T_{\breve{i}}^{(0)}}, \tag{109}$$

ср. с (90)-(92).

Частное решение $\{\Phi_{\breve{i}}^{(r)}\}_{\breve{i}\in\breve{N}}$ системы неоднородных интегральных уравнений (94), удовлетворяющее (99), можно строить аналогично тому, как строится удовлетворяющее (82) частное решение $\{\Phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ системы неоднородных интегральных уравнений (80), см. выше.

Рассмотрим подробнее систему газодинамических уравнений первого порядка малости (81), (98) $(r = 1)$, полученную выше, как необходимое (и достаточное) условие существования асимптотического решения системы интегральных уравнений первого порядка (74), (94) $(r = 1)$.
Для упрощения преобразований в соответствии с выражениями для функций распределения скоростей частиц нулевого порядка малости (45), (63) вместо функций $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$, $\psi_{\check{i}}^{(l)}$ в (81) и (98) $(r = 1)$ можно использовать, соответственно, $\Psi_{\hat{i}}^{(l)}$, $\Psi_{\check{i}}^{(l)}$:

$$\Psi_i^{(1)} = m_i, \tag{110a}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i \, \boldsymbol{C}_i, \tag{110b}$$

$$\Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2} \, m_i \, C_i^2, \tag{110c}$$

для внутренних компонент $\boldsymbol{C}_{\hat{i}} = \boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}$, для внешних компонент $\boldsymbol{C}_{\check{i}} = \boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}$.
При преобразовании дифференциальных частей уравнений (81) и (98) используем равенства:

$$\int \Psi_i^{(l)} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t}\, d\boldsymbol{c}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i - \int \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial t} f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i$$

$$= \frac{\partial \left(n_i\, \overline{\Psi_i^{(l)}}^{(0)} \right)}{\partial t} - n_i\, \overline{\frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial t}}^{(0)}, \qquad (111)$$

$$\int \Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{c}_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \int \Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i - \int \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}} f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_i\, \overline{\Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i}^{(0)} - n_i\, \overline{\boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}}}^{(0)}, \qquad (112)$$

$$\int \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{c}_i}\, d\boldsymbol{c}_i = -\int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i} \cdot \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i}\right) f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i$$
$$= -n_i\, \overline{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i} \cdot \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i}}^{(0)}. \qquad (113)$$

В (111)-(113) чертой сверху с индексом $^{(0)}$ обозначается среднее значение величины:

$$\overline{V}^{(0)} = \frac{1}{n_i} \int V f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i; \qquad (114)$$

$\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{c}_i$ рассматриваются как независимые переменные; в (113) при усреднении предполагается, что внешняя сила $\boldsymbol{X}_i$, действующая на частицу i-ого сорта, не зависит от скорости частицы, предполагается также, что интегралы, зависящие от внешних сил $\boldsymbol{X}_i$, сходятся, и произведение $\Psi_i^{(l)} \boldsymbol{X}_i f_i^{(0)}$ стремится к нулю, когда $\boldsymbol{c}_i$ стремится к бесконечности. После несложных преобразований из (81) и (98) $(r = 1)$ получаем следующую *систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости*:

$$\frac{\partial n_{\hat{i}}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_{\hat{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \quad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{115}$$

$$\hat{\rho}^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\mathrm{p}}^{(0)} + \sum_{\hat{i} \in \hat{N},\, \check{j} \in \check{N}} \boldsymbol{J}_{p,\, \hat{i}\check{j}}^{(0)} = \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} \boldsymbol{X}_{\hat{i}} - \hat{\rho}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}, \tag{116}$$

$$\frac{\partial \hat{E}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}^{(0)} + \hat{\mathrm{p}}^{(0)} : \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{\hat{i}\in\hat{N},\, \check{j}\in\check{N}} J_{E,\hat{i}\check{j}}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{E}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}, \tag{117}$$

$$\frac{\partial n_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \quad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{118}$$

$$n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} + \sum_{j\neq\check{i}} \boldsymbol{J}_{p,\check{i}j}^{(0)} = n_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{X}_{\check{i}} - n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \quad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{119}$$

$$\frac{\partial E_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{q}_{\check{i}}^{(0)} + \mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} : \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{j \neq \check{i}} J_{E,\check{i}j}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot E_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \quad \bigl(\check{i} \in \check{\mathrm{N}}\bigr). \qquad (120)$$

В соответствии с общими определениями тензора давления i-ой компоненты газовой смеси

$$\mathrm{p}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \int m_i (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)\,(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i) f_i \, d\boldsymbol{c}_i \qquad (121)$$

и вектора потока тепла i-ой компоненты

$$\boldsymbol{q}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \int \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)^2\,(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i) f_i \, d\boldsymbol{c}_i \qquad (122)$$

(ср. с [2], гл. 2, §§ 3, 4) в (115)-(120)

$$\hat{\mathrm{p}}^{(0)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)}^{(0)}$$
$$= \hat{n}^{(0)} T_{\hat{}}^{(0)} \mathrm{U} = \hat{p}^{(0)} \mathrm{U} \qquad (123)$$

– тензор давления внутренних компонент нулевого порядка, $\hat{p}^{(0)}$ – гидростатическое давление внутренних компонент нулевого порядка, U – единичный тензор, *двойное произведение* двух тензоров w и w' ранга 2 ([2], гл. 1, § 3) есть скаляр
$\mathrm{w} : \mathrm{w}' = \sum_\alpha \sum_\beta w_{\alpha\beta} w'_{\beta\alpha} = \mathrm{w}' : \mathrm{w}$,

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)^2 \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)}^{(0)} = 0 \qquad (124)$$

– вектор потока тепла внутренних компонент нулевого порядка,

$$\hat{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \right)^2}^{(0)} = \frac{3}{2} \hat{n}^{(0)} T_{\hat{}}^{(0)} \qquad (125)$$

– внутренняя энергия частиц внутренних компонент в единице объёма нулевого порядка, равная, в данном случае, энергии их поступательного хаотического движения, однако уравнения переноса энергии, записанные в виде (117) и (120) можно использовать и в более общих случаях (ср. с [11], гл. 7, § 6), в (123)-(125) усреднение (114) производится с функцией Максвелла $f_{\hat{i}}^{(0)}$ из (45);

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} &= n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right) \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right)}^{(0)} \\ &= n_{\check{i}}^{(0)} T_{\check{i}}^{(0)} \mathrm{U} = p_{\check{i}}^{(0)} \mathrm{U} \end{aligned} \qquad (126)$$

– тензор давления $\check{i}$-ой компоненты нулевого порядка, $p_{\check{i}}^{(0)}$ – гидростатическое давление $\check{i}$-ой компоненты нулевого порядка,

$$\boldsymbol{q}_{\check{i}}^{(0)} = \frac{1}{2} n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)^2 \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)}^{(0)} = 0 \qquad (127)$$

– вектор потока тепла $\check{i}$-ой компоненты нулевого порядка,

$$E_{\check{i}}^{(0)} = \frac{1}{2} n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)^2}^{(0)} = \frac{3}{2} n_{\check{i}}^{(0)} T_{\check{i}}^{(0)} \qquad (128)$$

– внутренняя энергия частиц $\check{i}$-ой компоненты в единице объёма нулевого порядка, в (126)-(128) усреднение (114) делается с функцией Максвелла $f_{\check{i}}^{(0)}$ из (63).

Аналитические выражения для интегралов $\boldsymbol{J}_{p,ij}^{(0)}$, $J_{E,ij}^{(0)}$ из (116), (117) и (119), (120) приведены ниже – см. (154), (158) и (162), (163).

В частности, если средние скорости и температуры совпадают для всех компонент смеси (множество внешних компонент пусто), то из (115)-(117) мы получаем систему газодинамических уравнений первого порядка малости теории Энскога-Чепмена [суммы по всем индексам i интегралов столкновений в (98) во всех порядках метода последовательных приближений равны нулю, в чем легко убедиться, используя равенство (35), с физической точки зрения это утверждение сводится к тому, что суммарные импульс и (кинетическая) энергия частиц газа в столкновениях их между собой не меняются]:

$$\frac{\partial n_{\hat{i}}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_{\hat{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \quad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{129}$$

$$\hat{\rho}^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\mathrm{p}}^{(0)} = \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} n^{(0)}_{\hat{i}} \boldsymbol{X}_{\hat{i}} - \hat{\rho}^{(0)} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}}, \quad (130)$$

$$\frac{\partial \hat{E}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}^{(0)} + \hat{\mathrm{p}}^{(0)} : \frac{\partial \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}}}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{E}^{(0)} \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}}. \quad (131)$$

Из (129), (131) с учётом (123)-(125) следует, что течение газа, описываемое системой уравнений газовой динамики первого порядка теории Энскога-Чепмена, является *адиабатическим*:

$$\frac{D}{Dt}\left[\hat{n}^{(0)} \left(T^{(0)}_{\hat{}}\right)^{-3/2}\right] = 0, \quad (132)$$

в *уравнении адиабаты* (132)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}^{(0)}_{\hat{}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}. \quad (133)$$

Речь идёт о вычислении многомерных интегралов вида

$$\iiiint \Psi_i^{(l)} \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)} \right) g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j . \qquad (134)$$

В (134) $\Psi_i^{(1)} = m_i$, $\boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i \boldsymbol{C}_i$, $\Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2} m_i C_i^2$, $\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i$;

$$f_i^{(0)} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)^2}{2T_i}} \qquad (135)$$

– функция Максвелла распределения скоростей частиц i-ой компоненты, штрих у функции распределения означает, что рассматривается распределение скоростей частиц после столкновения – $\boldsymbol{c}_i'$; чтобы несколько уменьшить громоздкость обозначений, опущен верхний индекс «$^{(0)}$» у n_i, $\boldsymbol{u}_i$, T_i. По поводу других обозначений – см. выше.

В соответствии с (35) интеграл (134) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\iiiint \Psi_i^{(l)} \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)} \right) g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \\
&\quad = \iiiint \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} g_{ij}'\, b'\, db'\, d\epsilon'\, d\boldsymbol{c}_i'\, d\boldsymbol{c}_j' \\
&\qquad - \iiiint \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \\
&\quad = \iiiint \left(\Psi_i^{(l)\prime} - \Psi_i^{(l)} \right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j . \qquad (136)
\end{aligned}$$

Поскольку масса частицы в столкновении сохраняется, для $\Psi_i^{(1)} = m_i$ интеграл (136) обращается в нуль. В двух других случаях, вообще говоря, это не так.

Основные трудности вычисления интеграла (136) связаны с тем, что параметры функций Максвелла для i-ой и j-ой компонент не равны:

$$\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}_j, \qquad T_i \neq T_j. \tag{137}$$

В результате не просто избавиться от скалярных произведений векторов в показателе экспоненты (желательно иметь максимально простое выражение для показателя экспоненты). Так как угол рассеяния зависит от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц {см., например, [2], гл. 3, § 4, п. 2 или [11], гл. 1, (5.26)}, естественно в (136) перейти к новым переменным – скорости центра масс сталкивающихся частиц $\boldsymbol{G}_{ij}$ и относительной скорости сталкивающихся частиц $\boldsymbol{g}_{ij}$, связанными со скоростям частиц $\boldsymbol{c}_i$ и $\boldsymbol{c}_j$ соотношениями:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{G}_{ij} + \frac{m_j}{m_i + m_j}\boldsymbol{g}_{ij}, \tag{138}$$

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{G}_{ij} - \frac{m_i}{m_i + m_j}\boldsymbol{g}_{ij}, \tag{139}$$

– ср. с [2], гл. 9, § 2. Для дальнейшего упрощения показателя экспоненты можно заменить вектор $\boldsymbol{G}_{ij}$ на вектор $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$, получающийся из $\boldsymbol{G}_{ij}$ в результате произвольного аффинного преобразования, являющегося композицией сдвига, гомотетии (умножения на скаляр) и вращения. Произвольность вращения сводится к свободе выбора направления полярной оси при переходе к сферической системе координат. Аналогично, вектор $\boldsymbol{g}_{ij}$ можно заменить на вектор $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$, получающийся из $\boldsymbol{g}_{ij}$ в результате композиции произвольной гомотетии и

произвольного вращения. Сдвиг начала отсчёта вектора $\boldsymbol{g}_{ij}$ привёл бы к параметрической зависимости конечного интеграла от *векторов* $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$ (ср. с [16], гл. 3), что нежелательно, так как предполагается интеграл (136) свести к интегралу типа интеграла Чепмена-Каулинга $\Omega_{ij}^{(l,s)}$ [см. [2], гл. 9, § 3, (3.29) и [11], гл. 7, (4.34)], зависящего только от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц g_{ij}.
С учётом сказанного сделаем следующую замену переменных $\boldsymbol{G}_{ij}$ и $\boldsymbol{g}_{ij}$:

$$\boldsymbol{g}_{ij} = z_1\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \tag{140}$$

$$\boldsymbol{G}_{ij} = z_2\, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} + \frac{\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j}{2}. \tag{141}$$

Скалярные множители z_1, z_2, и z_3 в (140)-(141) выбираем из условия, чтобы коэффициенты при $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}^2$ и $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}^2$ в показателе экспоненты были равны 1, а коэффициент при скалярном произведении $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$ был равен 0 (ср. с методом разделения переменных):

$$z_1 = \sqrt{\frac{2\left(m_i T_j + m_j T_i\right)}{m_i m_j}}, \tag{142}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{2 T_i T_j}{m_i T_j + m_j T_i}}, \tag{143}$$

$$z_3 = \frac{2\left(T_i - T_j\right)}{m_i + m_j} \sqrt{\frac{m_i m_j}{2\left(m_i T_j + m_j T_i\right)}}\,. \tag{144}$$

Аналогичные замены переменных могут быть использованы в более сложных ситуациях, например, рассматриваемых в [16], гл. 3.

В новых переменных показатель экспоненты можно записать в виде:

$$-\left\{\tilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{G}_{ij}^2 + a_0\, w^2 + a_1 \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\boldsymbol{w} + a_2 \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\cdot\boldsymbol{w}\right\}, \tag{145}$$

где

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2}, \tag{146}$$

$$a_0 = \frac{m_i}{2T_i} + \frac{m_j}{2T_j}, \tag{147}$$

$$a_1 = -2\sqrt{\frac{2m_i m_j}{m_i T_j + m_j T_i}}, \tag{148}$$

$$a_2 = \left(\frac{m_j}{T_j} - \frac{m_i}{T_i}\right)\sqrt{\frac{2T_i T_j}{m_i T_j + m_j T_i}}. \tag{149}$$

Нетрудно заметить, что при помощи только указанных выше преобразований переменных (без использования сдвига начала отсчёта вектора $\boldsymbol{g}_{ij}$) не удастся избавиться от постоянного слагаемого в показателе экспоненты (145) и, следовательно, от постоянного экспоненциального множителя, который войдёт далее во все выражения, содержащие интегралы вида (134), (136). У Струминского в [3], (8) такого рода множители отсутствуют.

Найдём якобиан преобразования переменных $(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) \longrightarrow \left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)$ [см. (140)-(141)]:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)} = \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{G}_{ij}\right)} \frac{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{G}_{ij}\right)}{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)}$$
$$= z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{c}_j + \frac{m_i}{m_i+m_j}\, \boldsymbol{g}_{ij}\right)} = z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{c}_j\right)}$$
$$= z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j, \boldsymbol{c}_j\right)} = z_1^3\, z_2^3. \tag{150}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\Psi_i^{(l)} = \boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i\right)$. С учётом (145), (150), (140)-(141) и равенства, вытекающего из определения $\mathbf{k}$ выше,

$$\begin{aligned} m_i \left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i\right) &= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \left(\boldsymbol{g}_{ij}' - \boldsymbol{g}_{ij}\right) \\ &= -2\, \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \left(\boldsymbol{g}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right) \mathbf{k}, \end{aligned} \tag{151}$$

интеграл (136) можно переписать в виде:

$$\iiiint m_i \left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i\right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j$$

$$= -2\,\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\, z_1^5\, z_2^3\, n_i \left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{3/2} n_j \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{3/2}$$

$$\times \iiiint \exp\left(-\left\{\tilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{G}_{ij}^2 + a_0\, w^2 + a_1 \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w} + a_2 \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w}\right\}\right)$$

$$\times \left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right) \mathbf{k} \tilde{g}_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\, d\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}. \qquad (152)$$

Интегрируя по ϵ в (152) (при фиксированных $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$ и $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$), вектор $\mathbf{k}$ разлагаем на две составляющие: параллельную и перпендикулярную вектору $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$

$$\int \left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right) \mathbf{k}\, d\epsilon = 2\pi \cos^2\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} = \pi \left(1 - \cos\chi\right) \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}. \qquad (153)$$

В результате получаем:

$$\boldsymbol{J}^{(0)}_{p,\,ij} = -\iiiint m_i \boldsymbol{C}_i \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)} \right) g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j$$

$$= -\iiiint m_i \left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i \right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j$$

$$= -16 n_i n_j \frac{m_i T_j + m_j T_i}{(m_i + m_j)} \frac{\boldsymbol{w}}{w} \frac{\sqrt{\pi}}{\xi^2}\; e^{-\frac{2 m_i m_j w^2}{m_i T_j + m_j T_i}}$$

$$\times \iint e^{-\tilde{g}_{ij}^2} \left[\tilde{g}_{ij} \xi \cosh\left(\tilde{g}_{ij} \xi \right) - \sinh\left(\tilde{g}_{ij} \xi \right) \right] \tilde{g}_{ij}^2 \left(1 - \cos\chi \right) b\, db\, d\tilde{g}_{ij}. \quad (154)$$

В (154)

$$\xi = a_1 w, \tag{155}$$

коэффициент a_1 определён формулой (148). Как нетрудно убедиться, особенность при $\xi = 0$, что возможно когда $w = 0$, в правой части, в действительности, отсутствует. Выражение (154) существенно отличается от выражения Струминского [3], (8).

Случай, когда $\Psi_i^{(l)} = \Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2}\, m_i\, (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)^2$ отличается от только что рассмотренного множителем перед экспонентой в правой части (152). Преобразуем разность $\Psi_i^{(l)\prime} - \Psi_i^{(l)}$ в соответствии с (140), (141) и [2], гл. 3, (4.9) и с учётом того, что в процессе столкновения меняется только направление относительной скорости частиц $(g_{ij} = g'_{ij})$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_i^{(3)\prime} - \Psi_i^{(3)} &= \frac{m_i}{2} \left[\left(\boldsymbol{c}'_i - \boldsymbol{u}_i \right)^2 - \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i \right)^2 \right] \\
&= \frac{m_i}{2} \left(\boldsymbol{c}'_i - \boldsymbol{c}_i \right) \cdot \left(\boldsymbol{c}'_i + \boldsymbol{c}_i - 2\boldsymbol{u}_i \right) \\
&= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \left(\boldsymbol{g}'_{ij} - \boldsymbol{g}_{ij} \right) \cdot \left(\boldsymbol{G}_{ij} - \boldsymbol{u}_i \right)
\end{aligned}
$$

$$
= -2\, z_1\, \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \mathbf{k} \right) \left(\mathbf{k} \cdot \left\{ z_2\, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} - \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2} \right\} \right). \quad (156)
$$

После интегрирования по ϵ, аналогично (153), получаем:

$$-2\,z_1\,\frac{m_i m_j}{m_i+m_j}\int(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\mathbf{k})\left(\mathbf{k}\cdot\left\{z_2\,\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}+z_3\,\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}-\frac{\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j}{2}\right\}\right)\,d\epsilon$$
$$=-2\pi\,z_1\,\frac{m_i m_j}{m_i+m_j}\,(1-\cos\chi)$$
$$\times\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\left\{z_2\,\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}+z_3\,\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}-\frac{\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j}{2}\right\}\right). \tag{157}$$

$$
\begin{aligned}
J_{E,\,ij}^{(0)} &= -\iiiint \frac{1}{2}\, m_i C_i^2 \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)} \right) g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \\
&= -\iiiint \frac{m_i}{2} \left[\left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{u}_i \right)^2 - \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i \right)^2 \right] f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\epsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \\
&= J_{e,\,ij}^{(0)} - \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{J}_{p,\,ij}^{(0)} \\
&= 16 n_i n_j \frac{\sqrt{\pi}}{\xi}\, e^{-\frac{2 m_i m_j w^2}{m_i T_j + m_j T_i}}
\end{aligned}
$$

$$
\times \iint e^{-\tilde{g}_{ij}^2} \left\{ D_{1,\,ij} \frac{w}{\xi} \left[\tilde{g}_{ij} \xi \cosh\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right) - \sinh\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right) \right] + 2 D_{2,\,ij} \tilde{g}_{ij}^2 \sinh\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right) \right\}
$$

$$
\times \tilde{g}_{ij}^2 \left(1 - \cos\chi\right) b\, db\, d\tilde{g}_{ij}. \tag{158}
$$

В (158):

$$D_{1,ij} = \frac{2\,m_j T_i}{m_i + m_j}, \tag{159}$$

$$D_{2,ij} = \frac{m_i m_j \left(T_i - T_j\right)}{2\,\left(m_i + m_j\right)^2} \sqrt{\frac{2\,T_i}{m_i} + \frac{2\,T_j}{m_j}}. \tag{160}$$

Остальные обозначения те же, что и в (154).
Интересно отметить, что при $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_j$ интеграл (154) и первое слагаемое в (158) обращаются в нуль, а второе слагаемое в (158) пропорционально $(T_i - T_j)$, что соответствует переносу энергии от «горячих» компонент к «холодным» – см. систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики (115)-(120). С учётом знака a_1, (148) и определения ξ (155) первое слагаемое приводит к *увеличению температуры* при $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}_j$.

Интегралы столкновений (154) и (158) являются сложными функциями средних скоростей и температур отдельных компонент, в основном, из-за сложной зависимости угла отклонения χ от (модуля) относительной скорости g_{ij} сталкивающихся частиц – ср. с [11], гл. 1, (5.26):

$$\chi\left(b, g_{ij}\right) = \pi - 2b \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi(r)}{m_{ij} g_{ij}^2} - \frac{b^2}{r^2}}}. \qquad (161)$$

В (161) $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ – приведённая масса сталкивающихся частиц, $\varphi\left(r\right)$ – потенциал центрального взаимодействия частиц, зависящий от расстояния r между ними.
В простейшем случае частиц, взаимодействующих как твёрдые сферы с диаметрами σ_i и σ_j, из (154) и (158) получаются

следующие аналитические выражения для интегралов столкновений:

$$
\boldsymbol{J}^{(0)\bullet}_{p,\,ij} = -n_i n_j \, \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i + m_j} \, \frac{\boldsymbol{w}}{w} \, \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^2} \, \sigma_{ij}^2 \times \left[e^{-\xi^2/4} 2\xi \left(\xi^2 + 2\right) + \sqrt{\pi} \left(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (162)
$$

$$
J^{(0)\bullet}_{E,\,ij} = n_i n_j \, \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^2} \, \sigma_{ij}^2 e^{-\xi^2/4} \, \left[2 D_{1,\,ij} w \xi \left(\xi^2 + 2\right) + 2 D_{2,\,ij} \, \xi^2 \left(\xi^2 + 10\right)\right] + n_i n_j \, \frac{\pi}{2\xi^2} \, \sigma_{ij}^2 \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) \times \left[D_{1,\,ij} w \left(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\right) + D_{2,\,ij} \, \xi \left(\xi^4 + 12\xi^2 + 12\right)\right]. \quad (163)
$$

В (162)-(163) $\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ и использованы обозначения из (146), (148), (155), (159)-(160).

Как известно, ламинарное течение становится турбулентным, когда некоторый параметр, характеризующий течение, а именно число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} > 1. \tag{164}$$

В (164) ρ – плотность газа, u и L – некоторые характерные макроскопические скорость и линейный размер течения, μ – коэффициент вязкости. Переписав (164) в виде

$$Re = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u}{L}}, \tag{165}$$

число Рейнольдса можно трактовать как отношение макроскопического потока импульса, пропорционального $f^{(0)}$, к обусловленному вязким давлением микроскопическому потоку, пропорциональному $\tilde{f}^{(1)}$ (с точки зрения кинетической теории газов вместо числа Рейнольдса более естественно было бы рассматривать отношение $Re = f^{(0)} / f^{(1)}$). Грубо говоря, вязкость, «выстраивая» молекулы газа по максвелловскому распределению с едиными средними скоростями и температурами для различных компонент смеси, может «переработать» только микроскопический поток импульса. Если же макроскопический поток превышает микроскопический, газовое течение, по необходимости, начинает расслаиваться на компоненты [и «включается» другой механизм, ведущий к равновесному состоянию газа, – см. интегральные слагаемые в (115)-(120), впрочем, с точки зрения кинетической теории газов это один и тот же механизм, столкновения частиц газа друг с другом]. Расслоение течения на компоненты может быть также обусловлено воздействием внешних факторов.

Система газодинамических уравнений второго порядка асимптотического разложения (т.е. с диффузией, вязкостью и теплопроводностью) теории Энскога-Чепмена, в принципе, не может описать газодинамические течения с развитой турбулентностью, поскольку

$$Re \sim \frac{f^{(0)}}{\tilde{f}^{(1)}} \to \infty, \tag{166}$$

когда $\tilde{f}^{(1)} \to 0$; при увеличении числа Рейнольдса в соответствии с этой системой уравнений наработка энтропии падает вплоть до полного прекращения роста энтропии в газе, см. уравнение адиабаты (132) (дополнительные по отношению к системе газодинамических уравнений первого порядка теории Энскога-Чепмена члены системы газодинамических уравнений второго порядка теории Энскога-Чепмена, соответствующие переходу газа в равновесное состояние и, следовательно, увеличению его энтропии, пропорциональны $\tilde{f}^{(1)}$), в то время, как в экспериментах с ростом числа Рейнольдса энтропия газа растёт, т.е. теоретическая (Энскога-Чепмена) и экспериментальная зависимости энтропии газа от числа Рейнольдса *разные*.

В системе газодинамических уравнений первого порядка малости теории Энскога-Чепмена (129)-(131) отсутствует перемешивание, т.к. все компоненты газовой смеси согласно уравнениям переноса массы (129) двигаются с одинаковой средней массовой скоростью смеси. Вещество из некоторой физической области (даже с подвижной границей) никак не может пересечь границу области. Перемешивание в системе уравнений газовой динамики, т.е. возможность частицам газа пересечь границу физической области, как и другие механизмы (вязкость и теплопроводность) ведущие газ к равновесию и, следовательно, увеличивающие энтропию газа, у

Энскога-Чепмена появляется только в следующем порядке малости асимптотического разложения функций распределения частиц газа по скоростям и связано со скоростями диффузии ($\sim \tilde{f}_i^{(1)}$) в уравнениях переноса массы. Отношение скорости диффузии некоторой компоненты газовой смеси к средней скорости этой компоненты $\sim 1/Re \sim \tilde{f}_i^{(1)} \Big/ f_i^{(0)}$ стремится к нулю при $\tilde{f}_i^{(1)} \to 0$. Поэтому описать наблюдаемое интенсивное *турбулентное перемешивание* в газодинамических течениях с большими числами Рейнольдса в рамках теории Энскога-Чепмена также не возможно.
Если уравнения газовой динамики не описывают турбулентных течений газов, значит либо в процессе перехода от точного решения системы кинетических уравнений Больцмана к её приближенному решению (методом Энскога), а затем к уравнениям газовой динамики было что-то упущено, либо

система кинетических уравнений Больцмана не описывает турбулентных течений газов и нуждается в замене. Однако необходимость замены системы кинетических уравнений Больцмана на другую систему кинетических уравнений представляется малообоснованной.

Газовая динамика компонент с функциями распределения скоростей, близкими к функциям Максвелла, с разными средними скоростями и температурами, должна описываться уравнениями (115)-(120). С этой точки зрения, наблюдаемая *хаотичность* турбулентного течения аналогична хаотичности броуновского движения. Отличаются они масштабом: в броуновском движении стохастически движется частица, имеющая массу сравнимую с массой других молекул газа, а в турбулентном течении стохастически движется тело, имеющее массу, сравнимую с массой отдельных компонент газа. Интегральные слагаемые в (116)-(117), (119)-(120), пропорциональные n_i, n_j, могут быть очень велики, этим объясняется *неожиданная* (для тех, кто пытается описать турбулентное течение с помощью системы газодинамических уравнений второго порядка Энскога-Чепмена) сила турбулентных эффектов.

- Д. Гильберт, *Основы общей теории линейных интегральных уравнений*, Избранные труды, Т. 2 (Факториал, Москва, 1998).
- С. Чепмен и Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов* (ИЛ, Москва, 1960).
- В. В. Струминский, ПММ, **38**, 203-210 (1974).
- К. П. Гуров, *Основания кинетической теории* (Наука, Москва, 1966).
- E. Nagnibeda and E. Kustova, *Kinetic Theory of Transport and Relaxation Processes* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009).
- R. Brun, *Introduction to Reactive Gas Dynamics* (Oxford University Press, New York, 2009).

- S. A. Serov S.A., S. S. Serova, Journal of Applied Mathematics and Physics **4**(08), 1687-1697 (2016).
- Н. Бурбаки, *Элементы математики. Книга IV. Функции действительного переменного* (Наука, Москва, 1965).
- К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана* (Мир, Москва, 1978).
- П. Резибуа и М. Де Ленер, *Классическая теория жидкостей и газов* (Мир, Москва, 1980).
- Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс и Р. Берд, *Молекулярная теория газов и жидкостей* (ИЛ, Москва, 1961).
- Дж. Ферцигер и Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах* (Мир, Москва, 1976).

Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике* (Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946).

I. Fredholm, Acta mathematica, **27**, 365-390 (1903).

Р. Курант и Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Т. 1 (ИЛ, Москва, 1949).

В. Н. Ораевский, Ю. В. Коников и Г. В. Хазанов *Процессы переноса в анизотропной околоземной плазме* (Наука, Москва, 1985).

D. Enskog, in *Kinetic Theory*, Vol. 3, edited by S. Brush (Pergamon Press, New York, 1972) [originally: Kungl. Svenska Vetenskaps Akad. Handl. 63, No. 4 (1921)].

- И. В. Лебедь и С. Я. Уманский, Химическая физика, **26**, № 1, 65 (2007).
- И. В. Лебедь, Химическая физика, **14**, № 5, 3 (1995).
- И. В. Лебедь, Chem. Phys. Lett., **165**, № 2-3, 226 (1990).
- И. В. Лебедь, Химическая физика, **15**, № 6, 64 (1996).