

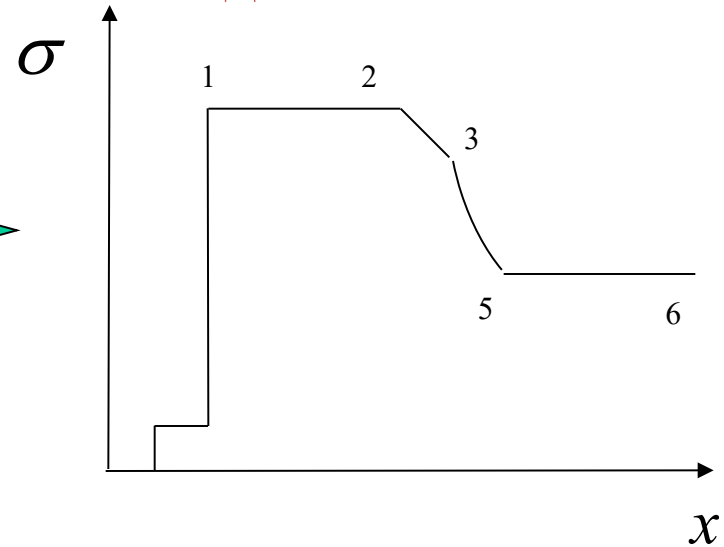
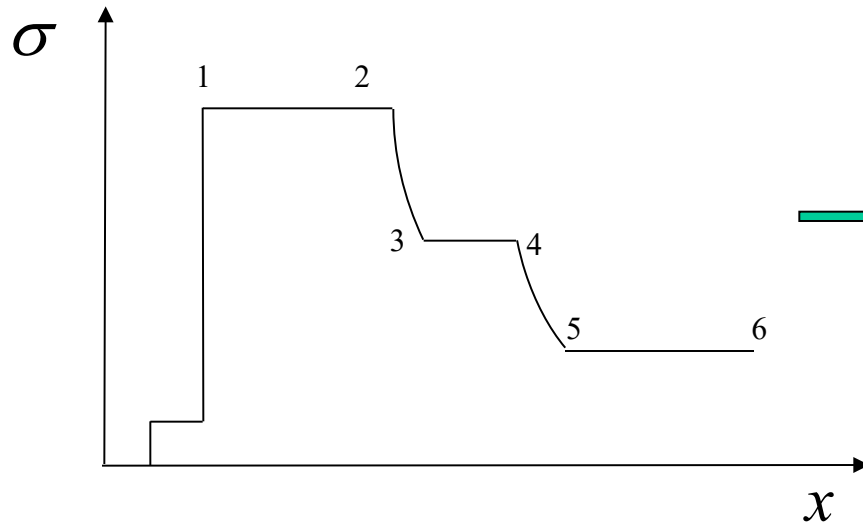
РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР -
ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Е.И.ЗАБАБАХИНА

**Автомодельная волна разрежения в
упругопластическом материале
(точное решение и численные расчеты)**

В.Н.Ногин, Н.С.Жиляева

Забабахинские Научные Чтения
Снежинск, Россия
31 мая 2023

Профиль волны разрежения для различных упругопластических моделей



$$\sigma_i = P(\rho, E) - S_i$$

$$\sum S_i = 0$$

$$J_2 = \sqrt{\sum S_i^2} = Y = F(\rho, P, T, \varepsilon, \dots)$$

1. Идеальное УП $Y = const$
2. Упрочнение
3. Эффект Баушингера

УРС $P = (\gamma - 1)\rho E + c_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k})$

Цель доклада – аналитическое описание структуры одномерной автомодельной волны разрежения произвольной амплитуды

Одномерные уравнения в автомодельном виде (ЗНЧ-2017)

$$S_x = -2S_y = -2S_z = S_0 = \frac{2}{3}Y$$

Автомодельная переменная

$$\xi = \frac{x}{t}$$

Упругая область

Пластическая область

$$\left\{ \begin{array}{l} (U - \xi)^2 \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{d(P+S)}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = C_p^2 \frac{d\rho}{d\xi} \\ \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho} = C_b^2 \text{ - объемная скорость звука} \\ \frac{dE_{yn}}{d\rho} = \frac{S}{\rho^2} \\ \frac{dS}{d\rho} = \mu \frac{4}{3\rho} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (U - \xi)^2 \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = C_{nl}^2 \frac{d\rho}{d\xi} \\ \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P + \rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\rho} = C_{nl}^2 < C_b^2 \\ S_0 = \frac{2}{3}Y \end{array} \right.$$

Простая волна!

$$\xi = \frac{x}{t} = U \pm C_p$$

$$U \mp \int C_p \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\xi = \frac{x}{t} = U \pm C_{nl} \quad U \mp \int C_{nl} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$C_p = \sqrt{C_b^2 + \frac{4\mu}{3\rho}} \text{ - продольная скорость звука}$$

Решение для среды с упрочнением

$$S = S_{00} + \alpha P$$

$$\frac{C_{nl}^2}{C_b^2} = (1 - \alpha) \left(1 - \frac{(\gamma - 1) S_{00}}{\rho_1 C_{b1}^2} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\alpha(\gamma - 1)}$$

Скорость распространения возмущений на входе в пластическую область меньше объемной скорости звука

Решение для среды с деформационным упрочнением

$$S = S_{00} \left(1 + \alpha \ln \frac{\rho_1}{\rho} \right)$$

$$C_{nl1} = \sqrt{\left(C_{b1}^2 - \frac{(\gamma - 1 - \alpha) S_{00}}{\rho_1} \right)}$$

Скорость распространения возмущений на входе в пластическую область больше или меньше объемной скорости звука

Учет эффекта Баушингера

$$S > 0 \longrightarrow \mu_{eff} = \mu \left(1 - \frac{S}{S_0} \right) \quad S_0 = const \quad \mu = const$$

Квазиупругая область

$$\frac{S}{S_0} = 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{4\mu}{3S_0}}$$

Состояние текучести не достигается

Скорость распространения возмущений на входе в квазиупругую область равна упругой скорости звука, а производная скорости по ρ имеет разрыв.

На профилях массовой скорости отсутствует область постоянного течения, но имеет место излом. Этот излом интерпретируется как приход пластической волны.

Одномерные расчеты совпадают с аналитическими решениями

Произвольные начальные условия

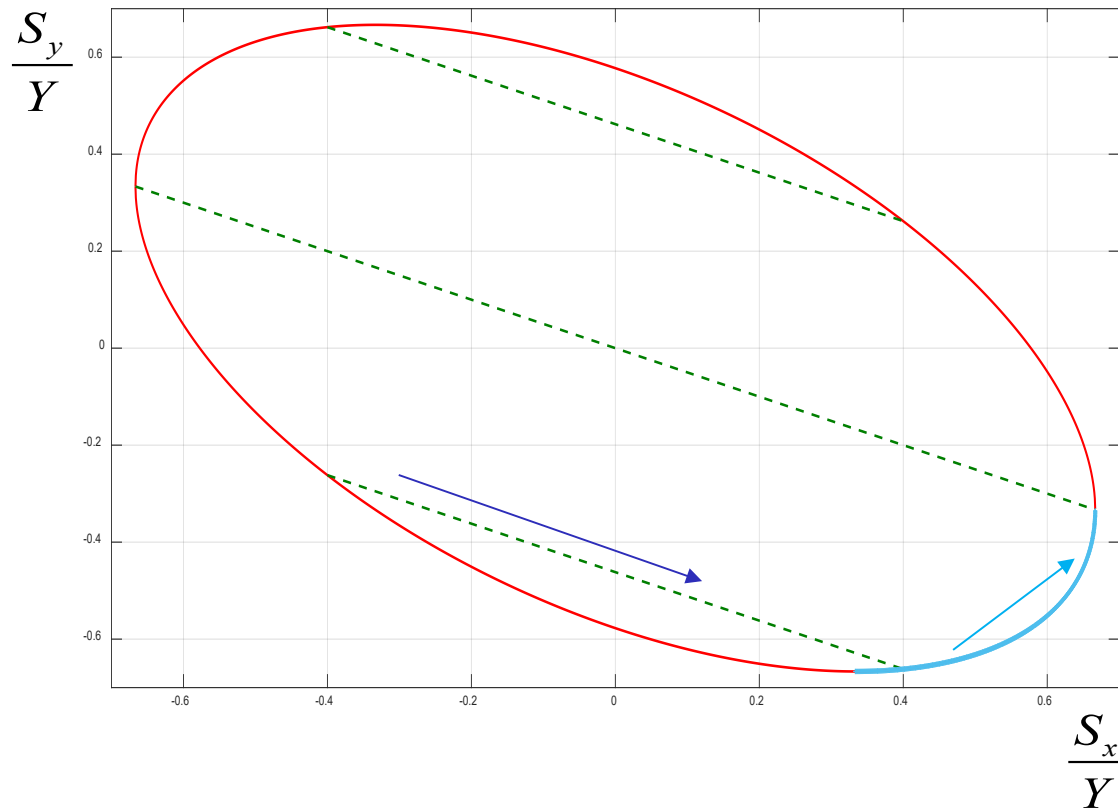
$$S_x \neq -2S_y \neq -2S_z$$



$$dS_x = -2dS_y = -2dS_z$$

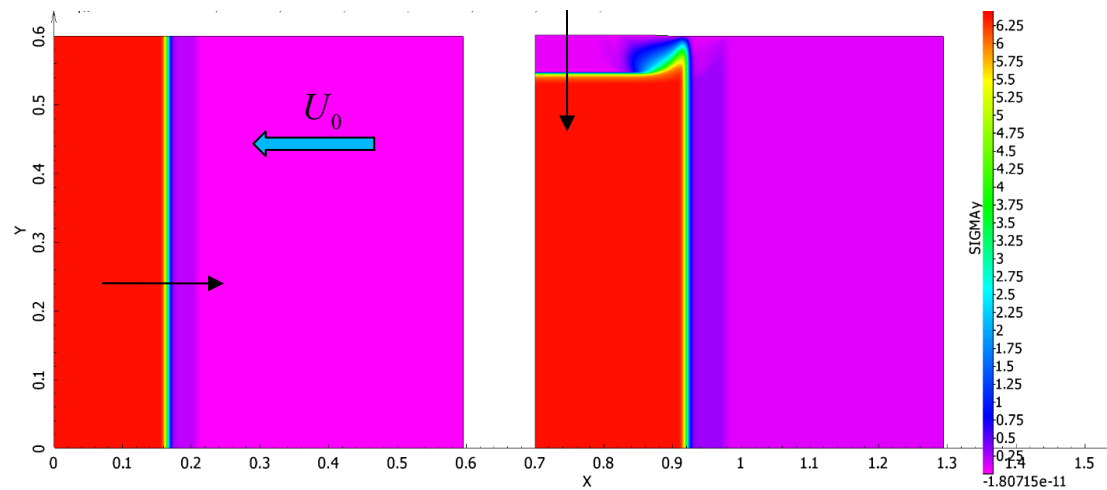
$$S_x^2 + S_x S_y + S_y^2 = \frac{1}{3} Y^2$$

$$Y = const$$

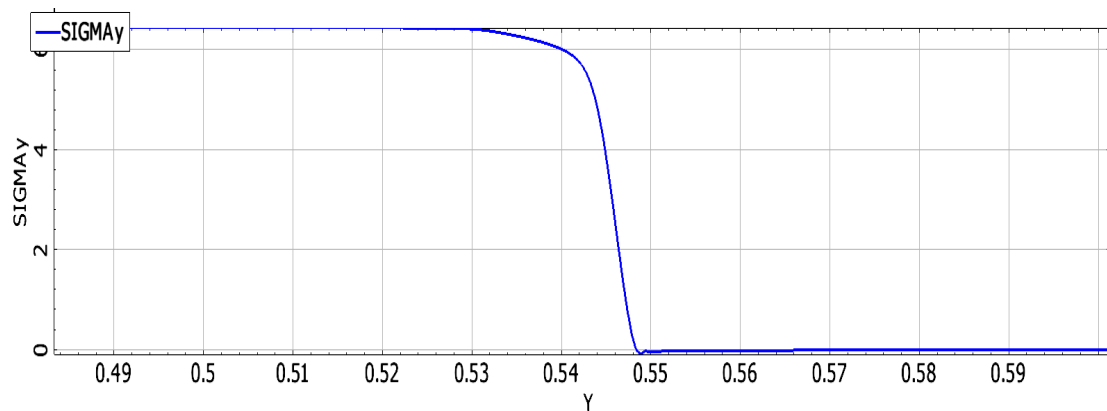


В пластической области $S_x = const$

Сравнение численного решения по программе СПРУТ с аналитическим



$$Y = 0.3$$
$$S_x = -0.2$$
$$S_y = 0.1$$



Численное решение не совпадает с аналитическим

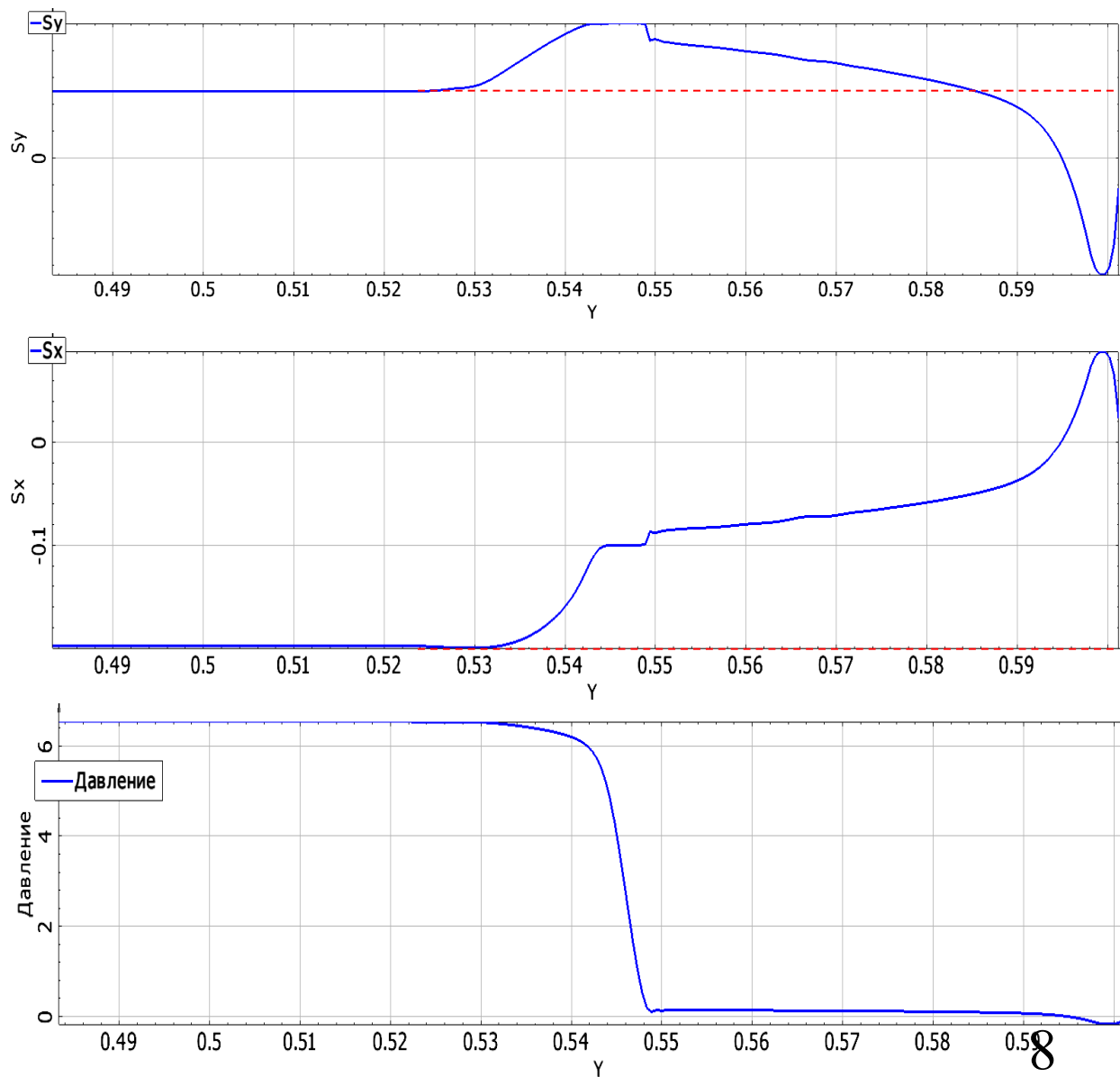
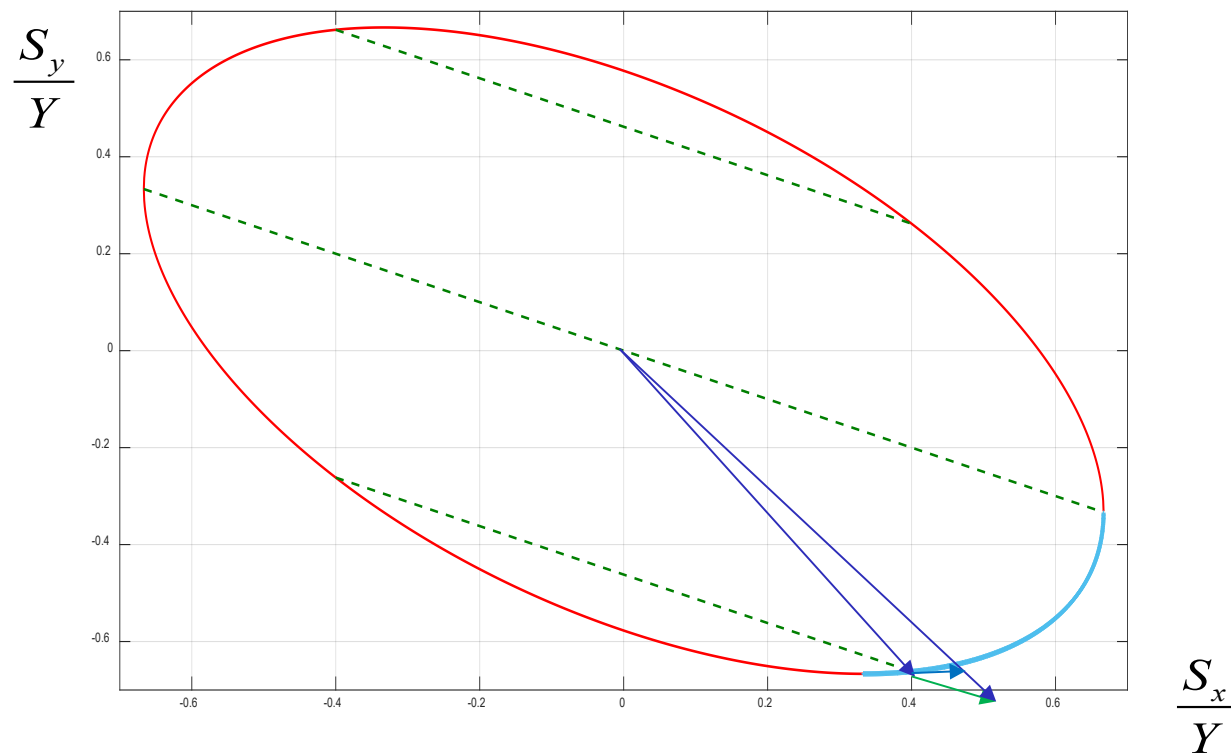


Схема Уилкинса 1969г

$$S'_i = S_i^n \frac{Y}{J_2}$$



Девиатор изменяется таким образом, чтобы реализовалась одномерная ситуация

Схема Уилкинса

$$\frac{dS_x}{d\rho} = -\frac{4\mu}{3\rho} \left(1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}\right)$$

$$\frac{dS_y}{d\rho} = \frac{4\mu}{3\rho} \left(\frac{1}{2} + \frac{9S_x S_y}{4Y^2}\right)$$

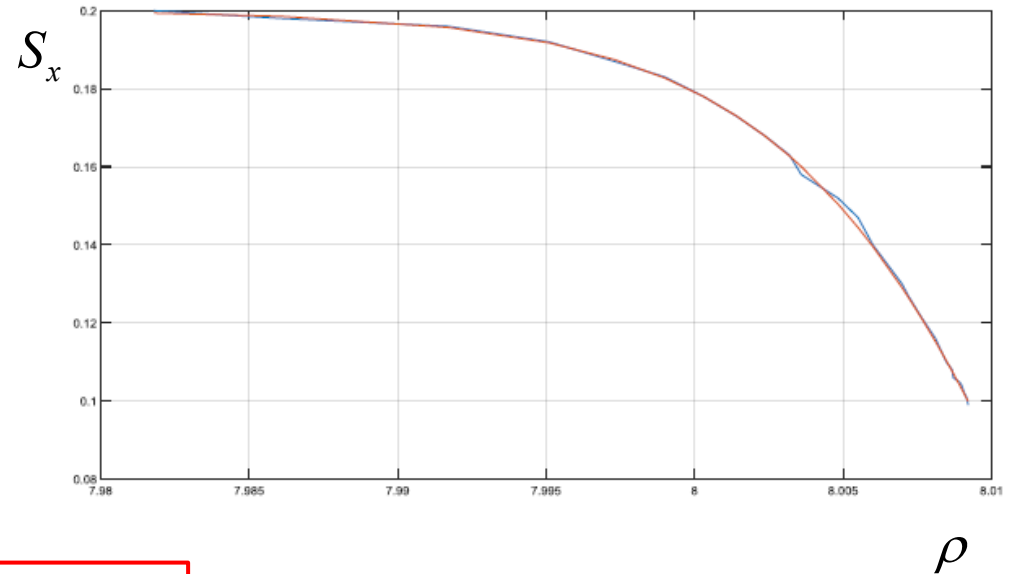
$$\frac{dS_y}{dS_x} = -\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{9S_x S_y}{4Y^2}\right)}{\left(1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}\right)}$$

$$S_y = -\frac{S_x}{2} + \frac{S_y^0 + \frac{S_x^0}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}Y^2 - \frac{3}{4}(S_x^0)^2}} \sqrt{\frac{1}{3}Y^2 - \frac{3}{4}S_x^2}$$

$$S_y \rightarrow -\frac{S_x}{2} \rightarrow -\frac{1}{3}Y$$

$$S_x = \frac{2}{3} \frac{B \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4\frac{\mu}{Y}} - 1}{B \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4\frac{\mu}{Y}} + 1} Y \rightarrow \frac{2}{3}Y$$

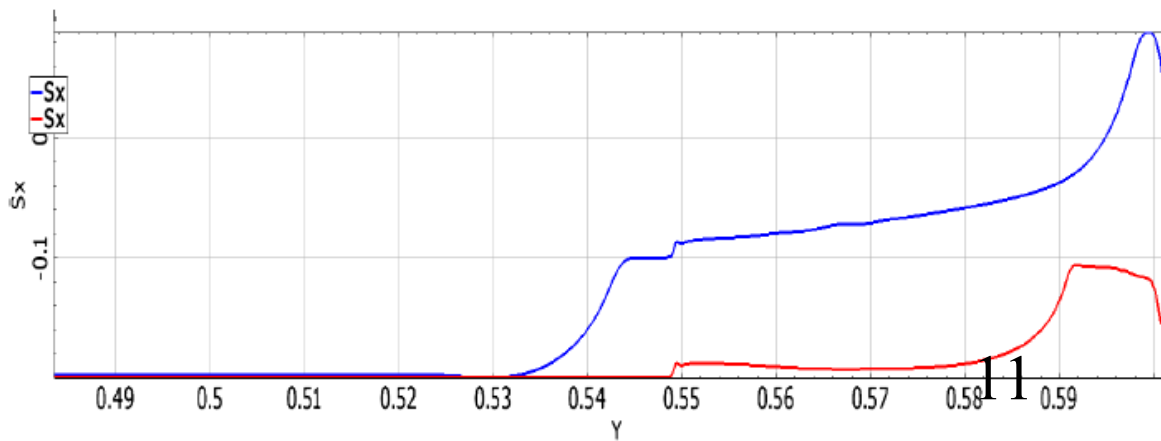
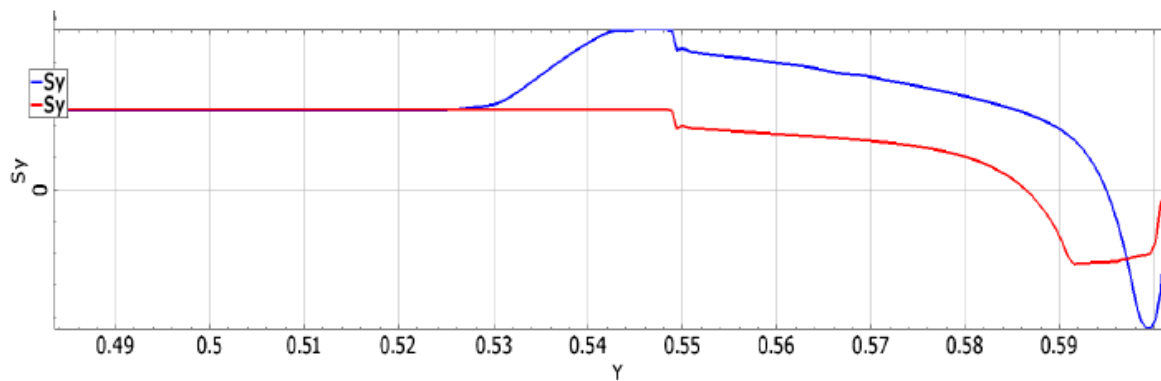
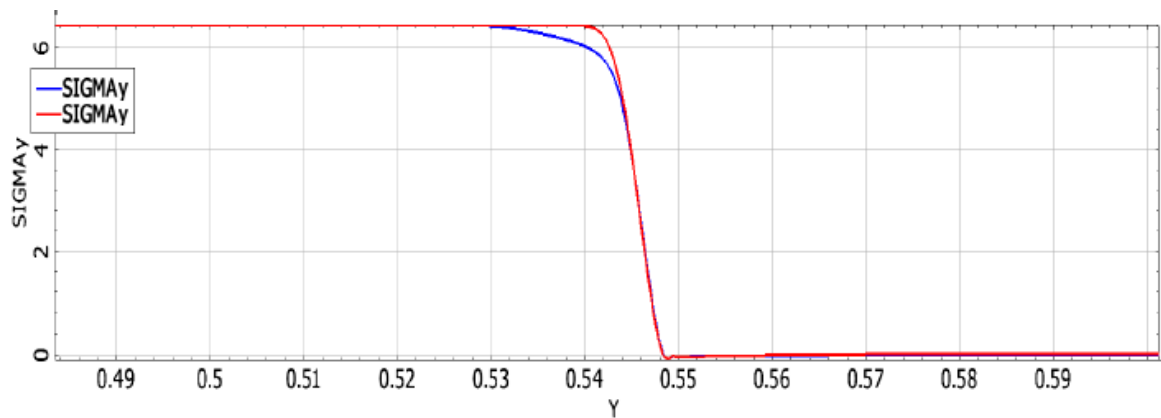
$$B = \frac{\frac{2}{3} + \frac{S_x^0}{Y}}{\frac{2}{3} - \frac{S_x^0}{Y}} \quad S_x^0 = \frac{1}{3}Y$$



$$C_p = \sqrt{C_b^2 + \frac{\mu}{\rho}}$$

- пластическая скорость звука

Численное решение



Произвольные начальные условия

$$S_x \neq S_y \neq S_{xy}$$

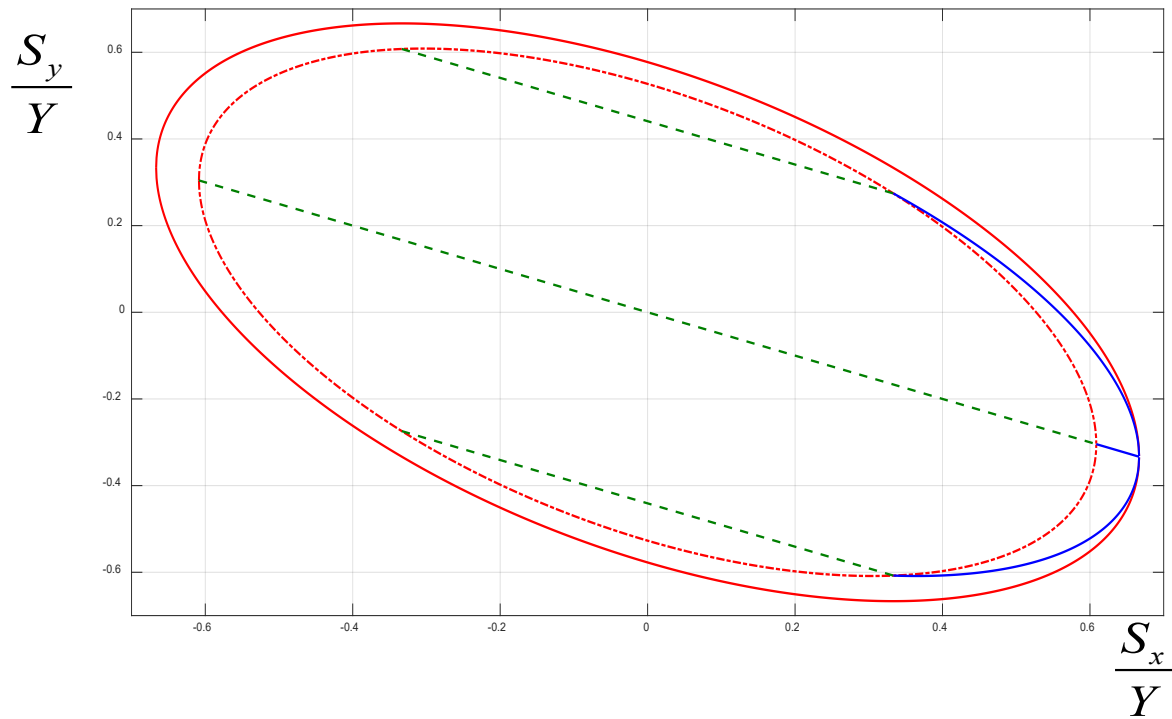


$$dS_x = -2dS_y = -2dS_z$$

$$dS_{xy} = \pm \rho C_s dV$$

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2S_{xy}^2 = \frac{2}{3}Y^2$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{ - поперечная скорость звука}$$



В пластической области $S_x = const$

Схема Уилкинса

$$\frac{dS_x}{d\rho} = -\frac{4\mu}{3\rho} \left(1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}\right)$$

$$\frac{dS_y}{d\rho} = \frac{4\mu}{3\rho} \left(\frac{1}{2} + \frac{9S_x S_y}{4Y^2}\right)$$

$$\frac{dS_{xy}}{d\rho} = 3 \frac{\mu}{\rho} \frac{S_x S_{xy}}{Y^2}$$



$$\frac{dS_y}{dS_x} = -\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{9S_x S_y}{4Y^2}\right)}{\left(1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}\right)}$$



$$\frac{dS_{xy}}{dS_x} = -\frac{9}{4} \frac{S_x S_{xy}}{Y^2 \left(1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}\right)}$$

$$S_{xy} = S_{xy}^0 \frac{\sqrt{1 - \frac{9S_x^2}{4Y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{9(S_x^0)^2}{4Y^2}}}$$

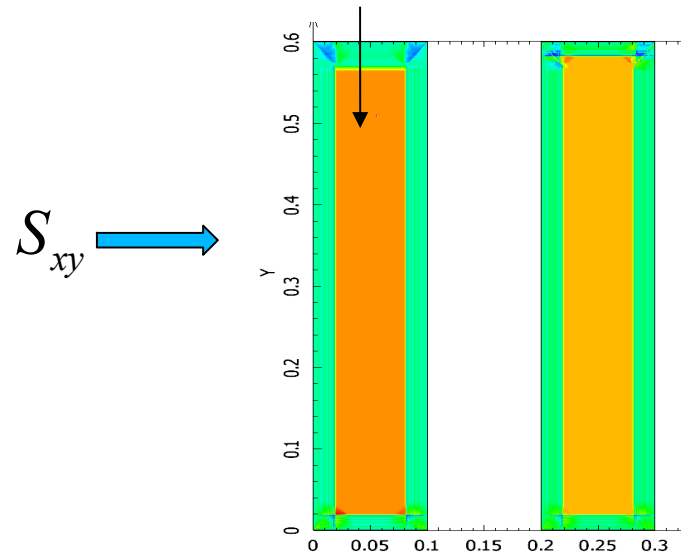
$$S_x = \frac{2}{3} \frac{B \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{4\mu}{Y}} - 1}{B \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{4\mu}{Y}} + 1} Y \rightarrow \frac{2}{3} Y$$

$$\begin{aligned} S_x &\rightarrow \frac{2}{3} Y \\ S_y &\rightarrow -\frac{1}{3} Y \\ S_{xy} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{t} = U \pm C_{nl} \\ U \text{ m} \int C_{nl} \frac{d\rho}{\rho} &= const \\ V &= 3 \frac{C_s^2}{C_{nl}^2} \frac{S_x S_{xy}}{Y^2} U \end{aligned} \right.$$

Волна разрежения не разделяется на продольную и поперечную

Сравнение численного решения по программе СПРУТ с аналитическим

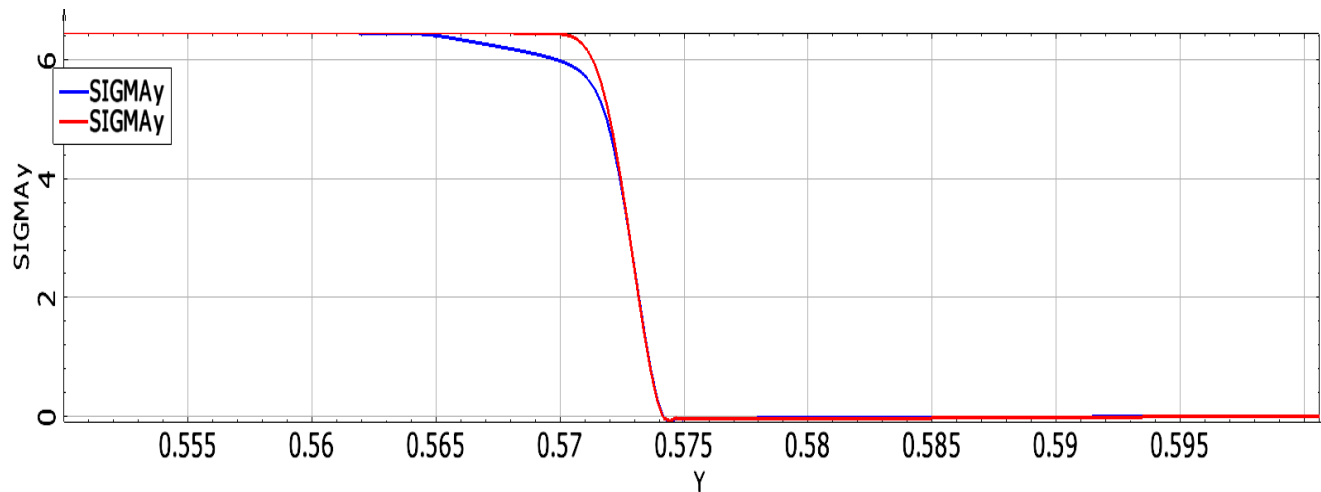


$$Y = 0.3$$

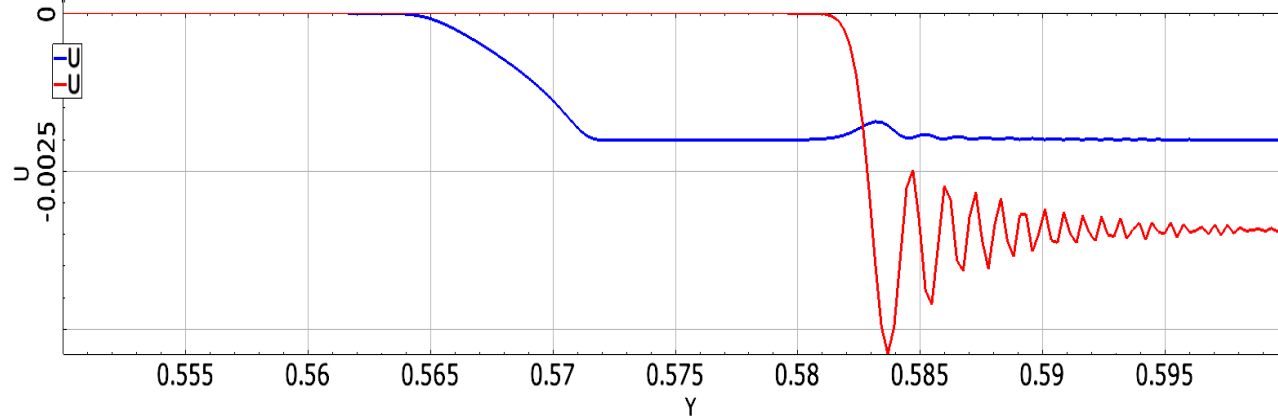
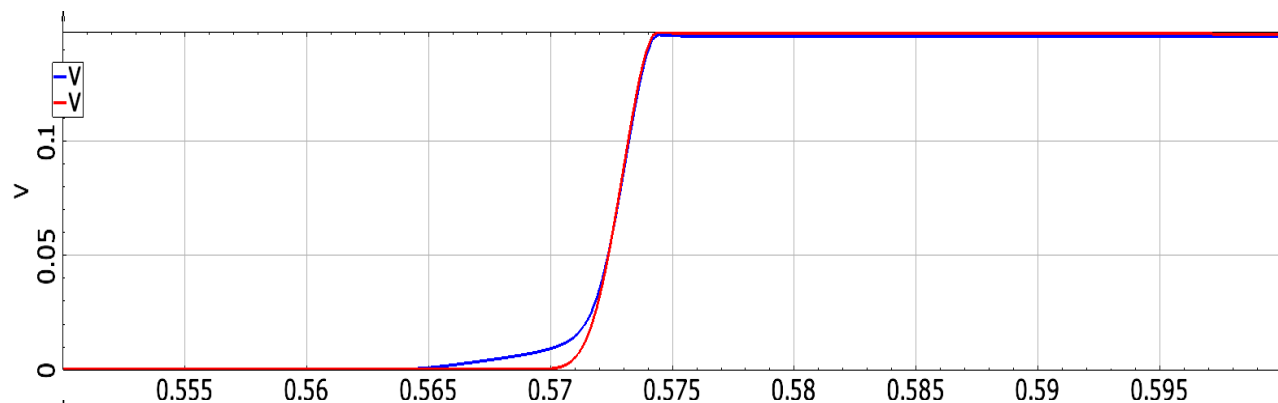
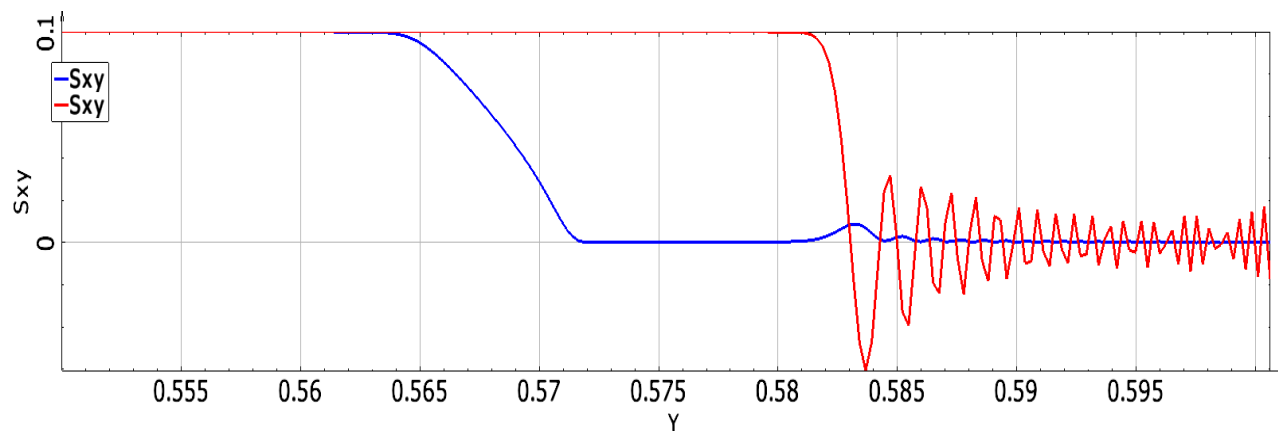
$$S_x = -0.2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_y = 0.1\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_{xy} = -0.1$$



Численное решение



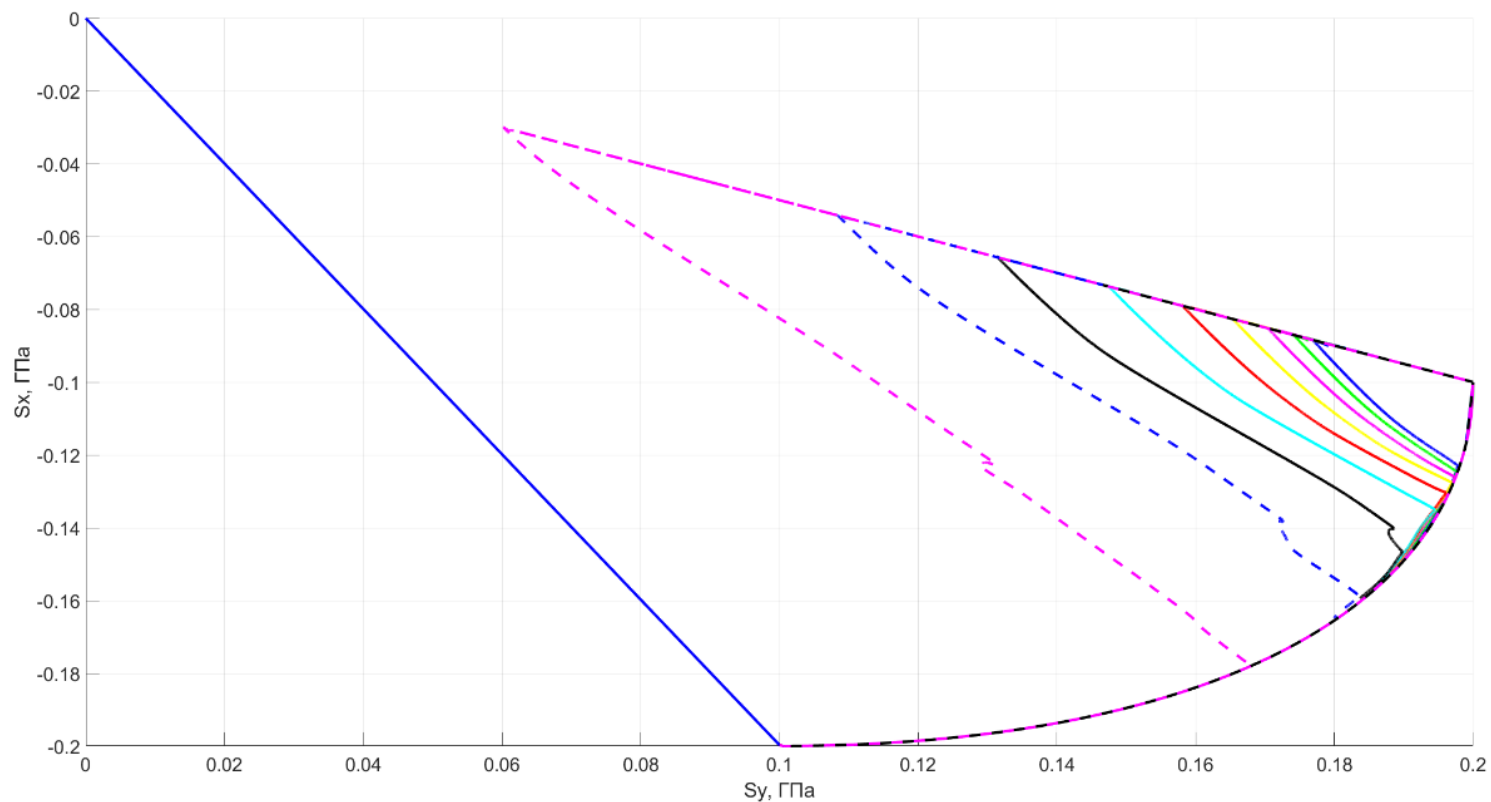
Выводы

1. На характеристиках в упругой и пластической областях сохраняются инварианты Римана.
2. Скорость распространения пластической волны не равна объемной скорости звука.
3. Отсутствие на экспериментально регистрируемых профилях области постоянного течения может объясняться эффектом Баушингера: квазиупругий характер разгрузки материала не позволяет достичь состояния текучести. При этом излом в регистрируемых профилях связан с изменением характера деформации (переход от упругой разгрузки к квазиупругой). В точке излома возмущения распространяются с продольной скоростью звука.

Выводы

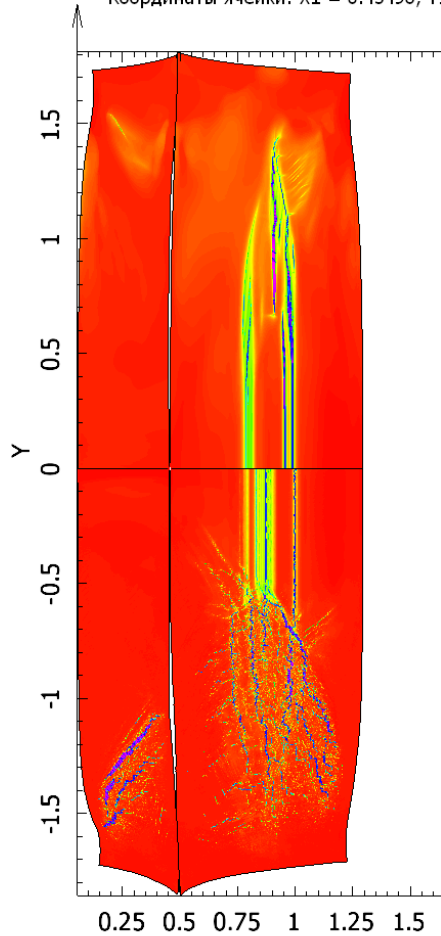
4. Для используемого в двумерных программных комплексах алгоритма корректировки компонент девиатора напряжений скорость малых возмущений в пластической области существенно зависит от начального положения на линии течучести.
5. В отличие от одномерных расчетов, в двумерных расчетах способ корректировки девиатора напряжений влияет на характеристики рассчитываемого течения.

Зависимость $S_y = f(S_x)$ на траекториях



Примеры расчетов без Уилкинса (соударение пластин)

Задача: z220096 Запись: 30 Время:
Величина: Плотность Мин: 0.55281 M
Текущее значение: Плотность = 7.85
Координаты ячейки: X1 = 0.45496, Y1



Задача: z220024.dat Запись: 03 Время: 0.03000 Шаг: 6000
Величина: delEps Мин: 0.00000 Макс: 42.18715
Текущее значение: delEps = 0.00000
Координаты ячейки: X1 = 0.20986, Y1 = 0.00000; X2 = 0.20986, Y2 = 0.00100; X3 = 0.21081, Y3 = 0.00100; X4 = 0.21081, Y4 = 0.00000

