Многомерные аналоги уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко

С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

XVI Забабахинские Научные Чтения

29 мая – 2 июня 2023

РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск

Постановки обратных задач

Дифференциальная	$L_q u = g, \;\; Pu = f$
Конечно-разностная	$L_q^h u^h = g^h, \;\; P^h u^h = f^h$
Операторная	$A(q) = f$
Вариационная	$J(q) = \|A(q) - f\|^2$

Теория: теоремы единственности и оценки условной устойчивости.

Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*. VSP, The Netherlands, 2004.

Кабанихин С.И. Бектемесов М.А., Аяпбергенова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач, Алматы, Наука, 2004.

Численные методы

Метод обращения конечно-разностной схемы

Линеаризация

$$q_1 = [A'(q_0)]^{-1} f_1$$

Метод Ньютона-Канторовича

$$q_{n+1} = q_n - [A'(q_n)]^{-1}(A(q_n) - f)$$

Градиентные методы:

- метод простой итерации

$$q_{n+1} = q_n - \alpha [A'(q_n)]^* (A(q_n) - f)$$

- метод наискорейшего спуска

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n),$$
$$\alpha_n = arg \min_{\alpha > 0} J(q_n - \alpha J'(q_n))$$

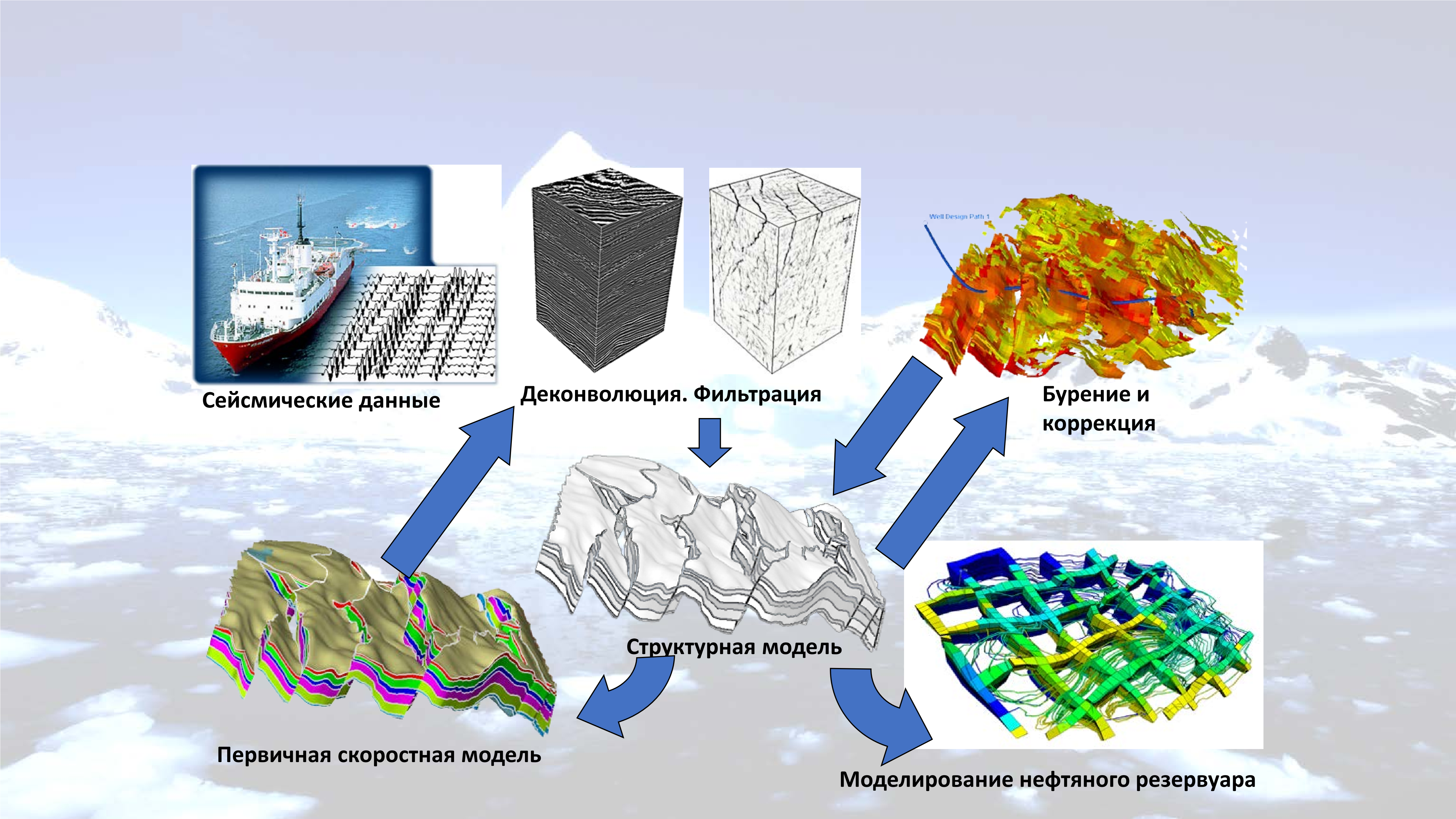
Метод Гельфанда-Левитана-Крейна

Метод граничного управления

Сейсморазведка

- Начало 20-ых годов прошлого века. Регистрация и анализ искусственно возбуждаемых упругих волн.
- Глубинное строение Земли.
- Месторождения полезных ископаемых (в основном нефти и газа).
- Задачи гидрогеологии и инженерной геологи.
- Сейсмическое микрорайонирование.

Сейсморазведка отличается высокой разрешающей способностью, технологичностью и большим объёмом получаемой информации.


Сейсмические данные
Деконволюция. Фильтрация
Well Design Path 1
Бурение и
коррекция
Структурная модель
Первичная скоростная модель
Моделирование нефтяного резервуара

Метод Гельфанда-Левитана-Крейна-Марченко

Преимущества:

Метод позволяет обойти нелинейность задачи - нелинейная обратная задача сводится к системе линейных интегральных уравнений

Метод ГЛК в некотором смысле является прямым методом - нет необходимости решать прямую задачу (нет итерационного процесса)

И.М. Гельфанд и Б.М. Левитан (1951), М.Г. Крейн (1954) - первые результаты (спектральные обратные задачи)

В.А. Марченко (1950-е гг.) - обратная задача рассеяния

А.С. Алексеев (1960-е гг.) – обратная задача сейсмики (А. С. Благовещенский, В. И. Добринский, B. Gopinath, M. Sondhi, R. Burridge, W.W. Symes и т.д.)

М.И. Белишев (1987), С.И. Кабанихин (1988) – двумерные аналоги

М.В. Клибанов (2005) - глобально сходящийся метод.

S.I. Kabanikhin. On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations. Doklady RAS. Vol. 309, No. 4 (1989).

S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin. Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems. VSP, The Netherlands, 2004.

E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam (1954). Численно исследована одномерная динамическая система, состоящая из 64 взаимодействующих частиц друг с другом и содержащих нелинейные члены, на MANIAC I в Лос-Аламосе. Нелинейные члены считались квадратичными, кубическими и кусочно-линейными. Коэффициенты Фурье строятся как функции времени. Численные расчеты показали тенденцию к равномерному распределению энергии по степеням свободы.
M.D. Kruskal, Zabussky (1964) нашли путем численного моделирования, что солитоны в КдФ эластично сталкиваются, что привело к открытию бесконечной серии законов сохранения.
C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura (1967) предложили метод обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Уравнение Кортевега-де Фриза проинтегрировано на основе перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q(x)\psi = k^2\psi$$

Задача Коши

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$
$$u(x,0) = f(x)$$

Решение задачи Коши $u(x,t)$

Данные рассеяния
S_0 по известной $f(x)$

Обратная задача.
Решение уравнения
Гельфанда-Левитана-Марченко

Данные рассеяния
S_0

для $t = 0$:

Данные рассеяния
$S(t)$

Для произвольного t

Метод обратной задачи рассеяния

Распространение сигнала в одномодовом оптическом волокне под действием вынужденного комбинационного рассеяния описывает обобщенное нелинейное уравнение Шредингера в скалярной форме

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(A(z,t)\int_0^\infty R(\tau)|A(z,t-\tau)|^2\, d\tau\right)$$

$A(z,t)$ медленно меняющееся электромагнитное поле, β_2 и β_3 коэффициенты дисперсии второго и третьего порядка в окрестности частоты ω и т.д.

Начальное условие $A(0,t) = A_0(t)$

Уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\boldsymbol{M(t,\tau) + \int_t^\infty R(\tau + y)\, M(t,y) dy = 0}$$

В волоконном лазере две волны с одинаковыми частотами и поляризационными состояниями распространяются вдоль оптического волокна в противоположных направлениях и взаимодействуют друг с другом из-за фазовой кросс-модуляции. Амплитуды прямой и обратной волн удовлетворяют системе связанных нелинейных уравнений Шредингера с потерями и усилением:

$$\frac{\partial A^+}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A^+}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A^+}{\partial t^2} = i\gamma(|A^+|^2 + 2|A^-|^2)A^+,$$

$$\frac{\partial A^-}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A^-}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A^-}{\partial t^2} = i\gamma(|A^-|^2 + 2|A^+|^2)A^-.$$

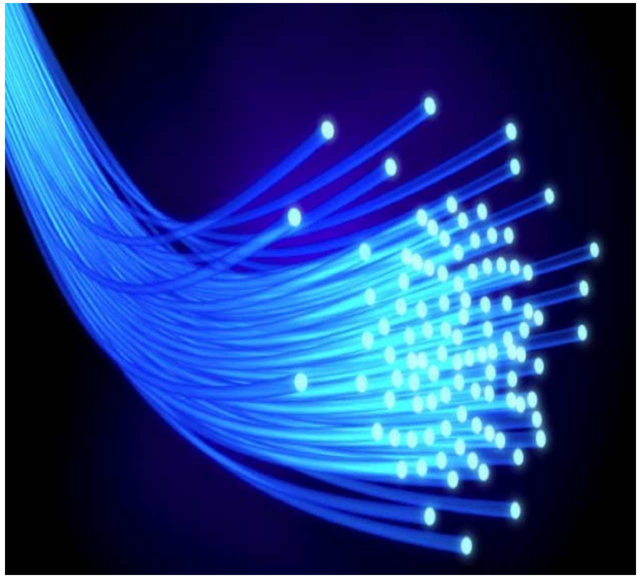
Здесь «+» и «-» обозначают волны, распространяющиеся в прямом и обратном направлениях, β_1 и β_2 - коэффициенты дисперсии первого и второго порядка, γ - нелинейный коэффициент.

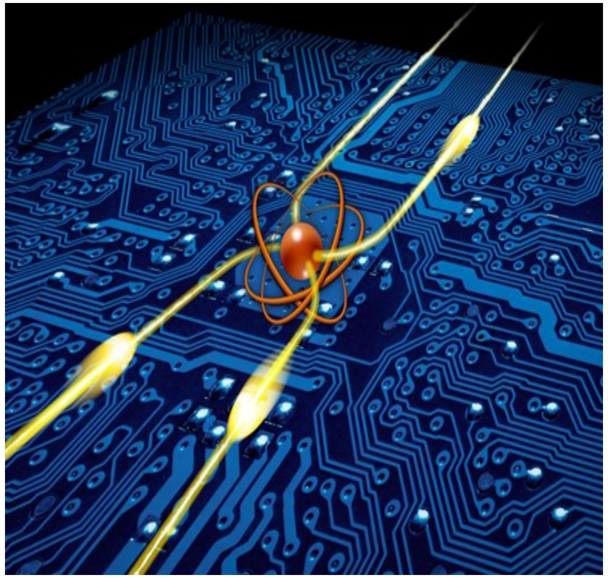
$$\boldsymbol{M_1(t,\tau) + \int_t^\infty R(\tau+y)\, M_2(t,y)dy = 0, \quad \mp M_2(t,\tau) + R(t+\tau) + \int_t^\infty R(\tau+y)\, M_1(t,y)dy = 0.}$$

Разработка методов решения уравнений ГЛК

Позволяет исправить искажения сигнала в оптических системах передачи данных. Результаты моделирования и практические эксперименты показали уникальную производительность канала: при сохранении качества передаваемого сигнала его скорость передачи превысила текущие показатели передачи лучших существующих коммерческих систем в 24 раза и составила 240 Гбит / с.

На социальном уровне повышенная скорость передачи данных откроет новую эру для больших данных и Интернета вещей (IOT). В случае реализации технологии около 10 тысяч человек смогут передавать 4K-видео в одно и то же время, что, по сравнению с текущей скоростью, доступно только для 400 человек.





Площадная система наблюдений

Большинство известных из мировой практики работ по площадным системам нашли применение в относительно сложных сейсмогеологических условиях.

Как правило, применяемые системы являются регулярными, а расстояние между точками наблюдений обычно 50 м или 25 м.

Известны примеры и более густых сеток пространственных наблюдений в случае детальных работ.

Контроль за разработкой месторождений углеводородов в штате Луизиана (США): шаг между точками 10 м.

Разведка на уголь в Рурском бассейне (Германия): шаг между точками 2.5 м.

Трудоемкость решения прямой задачи сейсмики

Сейсмические волны проходят через исследуемые объекты, рассеиваются, отражаются и приносят информацию на поверхность Земли об искомых объектах.

Обычно обратные задачи решаются методом минимизации целевого функционала.

На каждом этапе итерационного алгоритма минимизации функционала необходимо решать прямые задачи.

В 3D решение прямой задачи очень трудоемкая операция.

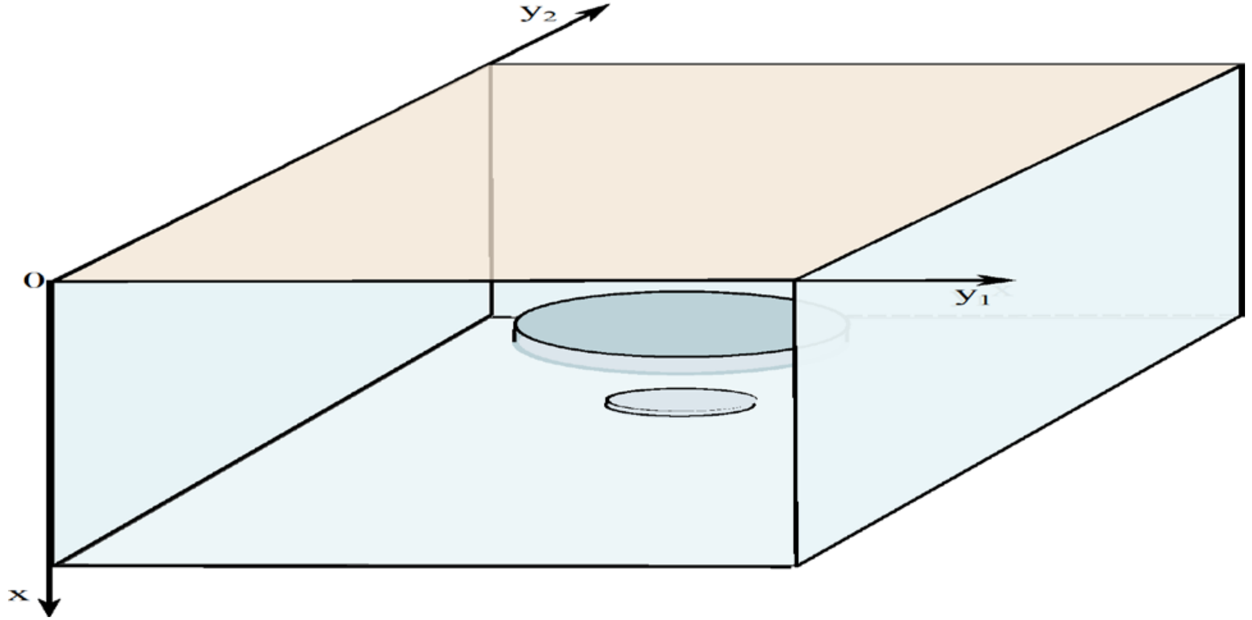
- 2 км x 2 км, шаг сетки = 1 метр.
- Серия прямых задач решена на кластере на одном узле (20 ядер).
- Решение для одного источника занимает 30 минут на 20 ядрах.
- Решение для 40 источников на одном узле занимает 20 часов.
- Оценка времени решения 3D задачи 50 000 часов или 6 лет (20 ядер) – 1 источник.

Постановка обратной задачи

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x,y,z) \nabla u^{(k)},$$
$$u^{(k)}\big|_{t<0} \equiv 0,$$
$$u_x^{(k)}(0,y,t) = h^{(k)}(y)\delta(t) \cdot$$

Требуется определить плотность $\rho(x,y,z)$ по дополнительной информации, заданной на поверхности $z = 0$.

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t).$$



3D аналог уравнения М.Г. Крейна

$$2\Phi^{(k)}(x,t)-\sum_{m}\int_{-x}^{x} f_m^{(k)\,\prime}(t-s)\Phi^{(m)}(x,s)\,ds=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(k,y)}}{\rho(0,y)}\,dy,$$

$$t\in(-x,x),\qquad y_j\in(-\pi,\pi),\qquad j=1,2,\qquad k\in Z^2.$$

$$\rho(x,y)=-\frac{\pi^2}{\rho(0,y)}\left[\sum_{m}\Phi^{(m)}(x,x-0)\,e^{-i(m,y)}\right]^{-2}.$$

Решение обратной задачи сейсмики для горизонтально-слоистых сред

- Определение коэффициентов системы динамических уравнений теории упругости:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{graddiv}\mathbf{U}+\mu\Delta\mathbf{U}+\mathrm{grad}\lambda\,\mathrm{div}\mathbf{U}+\sum_{l=1}^{3} grad\,\mu\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_l}+grad\mathbf{U}_l\right)\mathbf{e}_l=\rho\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2};$$

$$\mathbf{U}(x,y,z,t)\,|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\sigma_z\,|_{z=0}=g_1(x,y,t),\ \tau_{xz}\,|_{z=0}=g_2(x,y,t),\ \tau_{yz}\,|_{z=0}=g_3(x,y,t);$$

$$\mathbf{U}(x,y,0,t)=\mathbf{F}(x,y,t)$$

Функция $\tilde{q}_k$ связана с параметрами среды (скорость распространения волн, плотность)

$$A_k(x,y)+K_k(x,y)+\int_0^x K_k(x,s)A_k(y,s)ds=0,\ y\le x;\quad \tilde{q}_k(x)=2\frac{dK_k(x,x)}{dx}$$

Дискретизация уравнения М.Г. Крейна

После дискретизации перейдем к СЛАУ:

$$(2I - hA)\Phi = G$$

$$A = \begin{vmatrix} F(0) & F(-h) & \dots & F((2n-1)h) \\ F(h) & F(0) & \dots & F((2n-2)h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F((2n-1)h) & F((2n-2)h) & \dots & F(0) \end{vmatrix}$$

Матрица имеет размерность $n(2N+1)$, где n размерность сетки, N число источников и приемников.

В 2D в области 3 х 3 км^2 с шагом 5м и 50 источников и приемников, матрица имеет размерность 120 000^2.

Для куба 3 х 3 х 3 км^3 – матрица имеет размерность 12 000 000^2.

Обращение теплицевой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n} & a_{-n+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix} = \left(a_{i-j}\right)_{i,j=1..n}$$

СЛАУ с теплицевой матрицей описывается $O(n)$.

Первый метод обращения - Levinson, 1947.

Используя теплицевость:

-“Быстрые” методы: $O(n^2)$ операций (Levinson, Durbin, Trench, Zohar, Chandrasekaran, Sayed, Gohberg, Kailath, Olshevsky, Gu ...)

-“Супербыстрые” методы: $O(n \log^p n)$ операций, $O(n)$ памяти (Martinsson, Tygert, Rokhlin, Ammar, Gragg, Stewart, Codevico, van Barel, Heinig, Chandrasekaran, Gu, Xia, Zhu ...)

Супербыстрые предоубуславливатели : $O(n \log n)$ операций, $O(n)$ памяти (Chan, Chan, Strang, Yeung, Di Benedetto, Jin, Kailath, Olshevsky, Ku, Kuo, Strela, Tyrtyshnikov, ...)

Методы обращения: типа Levinson – факторизация A^{-1}, типа Schur – факторизация A.

Мы используем обращение блочно-теплицевой матрицы быстрым методом, предложенным В.В. Воеводиным и Е.Е. Тыртышниковым.

Решение обратной задачи в точке *x* требует O(N^2 n^2) операций (O(N^3 n^3) - стандартный).
Решение обратной задачи на отрезке *(0,x)* требует O(N^2 n^2) операций (O(N^3 n^4)).

Сингулярное разложение матрицы.
Современные алгоритмы: число операций $O(n^3)$, требуется $O(n^2)$ памяти (Intel MKL).

Супербыстрые алгоритмы, использующие структуру теплицевых матриц, опираются на теорему И.Ц. Гохберга и А.А. Семенцула (1972):
$O(n \log n)$ операций, требуется $O(n)$ памяти.

Метод сингулярного разложения позволяет найти решение обратной задачи в одной точке x_0. Чтобы найти решение обратной задачи в точке $x_1 \neq x_0$, необходимо снова применять SVD.

Теплицева структура матрицы для уравнения ГЛК позволяет не только найти решение в точке x_0, но и восстановить решение на всем интервале $(0, x_0)$.

Обращение теплицевой матрицы

Стандартный метод Гаусса: $O(n^3)$ операций.

Использование структуры матрицы:

Быстрые методы: $O(n^2)$ операций.

Levinson, Durbin, Trench, Zohar, Chandrasekaran, Sayed, Gohberg, Kailath, Olshevsky, Gu .

Супербыстрые методы: $O(n \log^p n)$ операций, $O(n)$ памяти.

Martinsson, Tygert, Rokhlin, Ammar, Gragg, Stewart, Codevico, van Barel, Heinig, Chandrasekaran, Gu, Xia, Zhu.

Супербыстрые предобуславливатели: $O(n \log n)$ операций, $O(n)$ памяти.

Chan, Chan, Strang, Yeung, Di Benedetto, Jin, Kailath, Olshevsky, Ku, Kuo, Strela, Tyrtyshnikov.

Решение СЛАУ

Рассмотрим решение специального вида СЛАУ $Aq = f$.

Для всех $k = 0, \dots, n-1$ рассмотрим систему $A_k q^k = f^k$, где $f^k = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{k-1} \end{bmatrix}$. Тогда $f^{n-1} = f$, $q^{n-1} = q$.

$$A^k \begin{bmatrix} q_0^{k-1} \\ \dots \\ q_{k-1}^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{k-1} \\ \dots \\ f_{n-1}^{k-1} \\ \epsilon_q^{k-1} \end{bmatrix}$$

Величины ϵ_q^{k-1} вычисляются похожим образом, как и ϵ_x, ϵ_z. q^k находится из следующего уравнения:

$$\mathrm{q}^{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} q_0^k \\ \dots \\ q_{k-1}^k \\ q_k^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^{k-1} \\ \dots \\ q_{k-1}^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(f_k - \epsilon_q^k\right) z^k$$

ГЛК-уравнение для $x = L$ решается с помощью этого методом, при этом рекурсия позволяет найти решение ГЛК-уравнения для всех $x < L$.

S.I.Kabanikhin, N.S.Novikov, I.V.Oseledets, M.A.Shishlenin, Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem, J*. Inverse Ill-Posed Probl.,* Vol. 23, 2015, no.6.

Метод Монте-Карло

Систему интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_X k_{ij}(x,y)\varphi(y)dy + h_i(x)$$

запишем в иде: $\Phi = K\Phi + H$

Цепь Маркова $\{x_n\}, n = 0..N$, соответствует плотности $p(y,x)$, N – случайное число обрыва цепи в точке, $x_0 \equiv x$. Рассмотрим случайную величину

$$\xi_x = H(x) + \sum_{n=1}^{N} Q_n H(x_n)$$

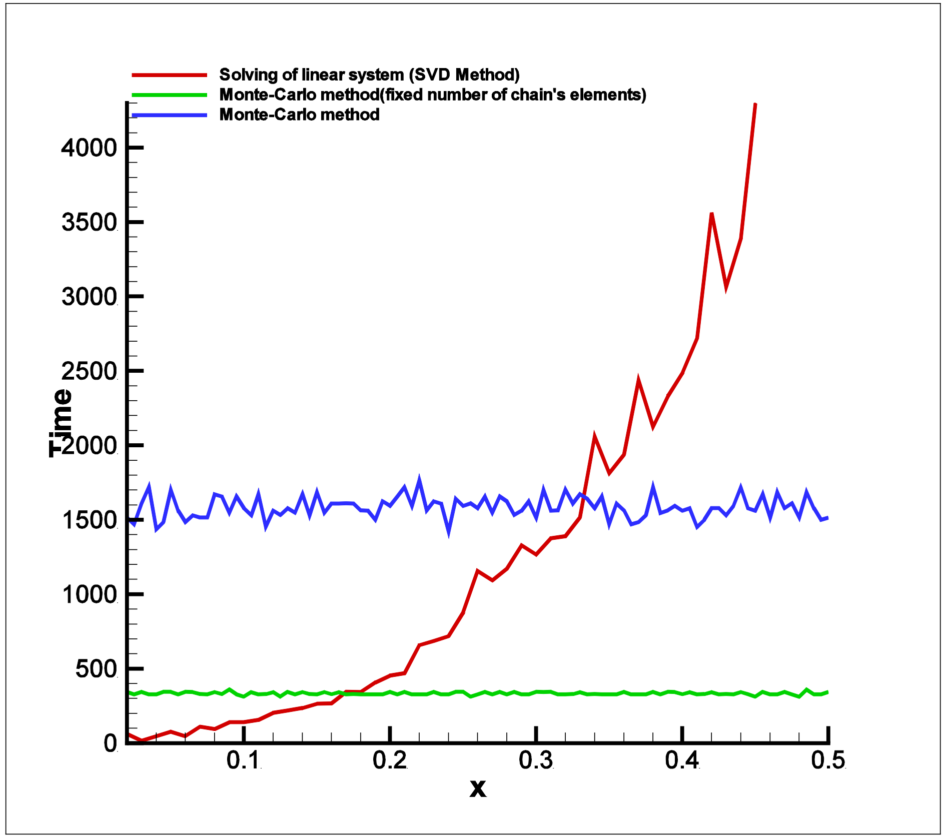
Здесь

$$Q_0 = I\ , Q_{n+1} = Q_n \frac{K(x_n, x_{n+1})}{p(x_n, x_{n+1})}$$

Приближенное решение получается по формуле для ξ_x:

$$\Phi(x) = E\xi_x \approx \frac{\xi_1 + \ \dots + \xi_M}{M}$$

S.I.Kabanikhin, K.K.Sabelfeld, N.S.Novikov, M.A.Shishlenin, Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.,* Vol. 23, 2015, no.5.
S.I.Kabanikhin, K.K.Sabelfeld, N.S.Novikov, M.A.Shishlenin, Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods, *Monte Carlo Methods Appl.*, Vol. 21, 2015, no.3.

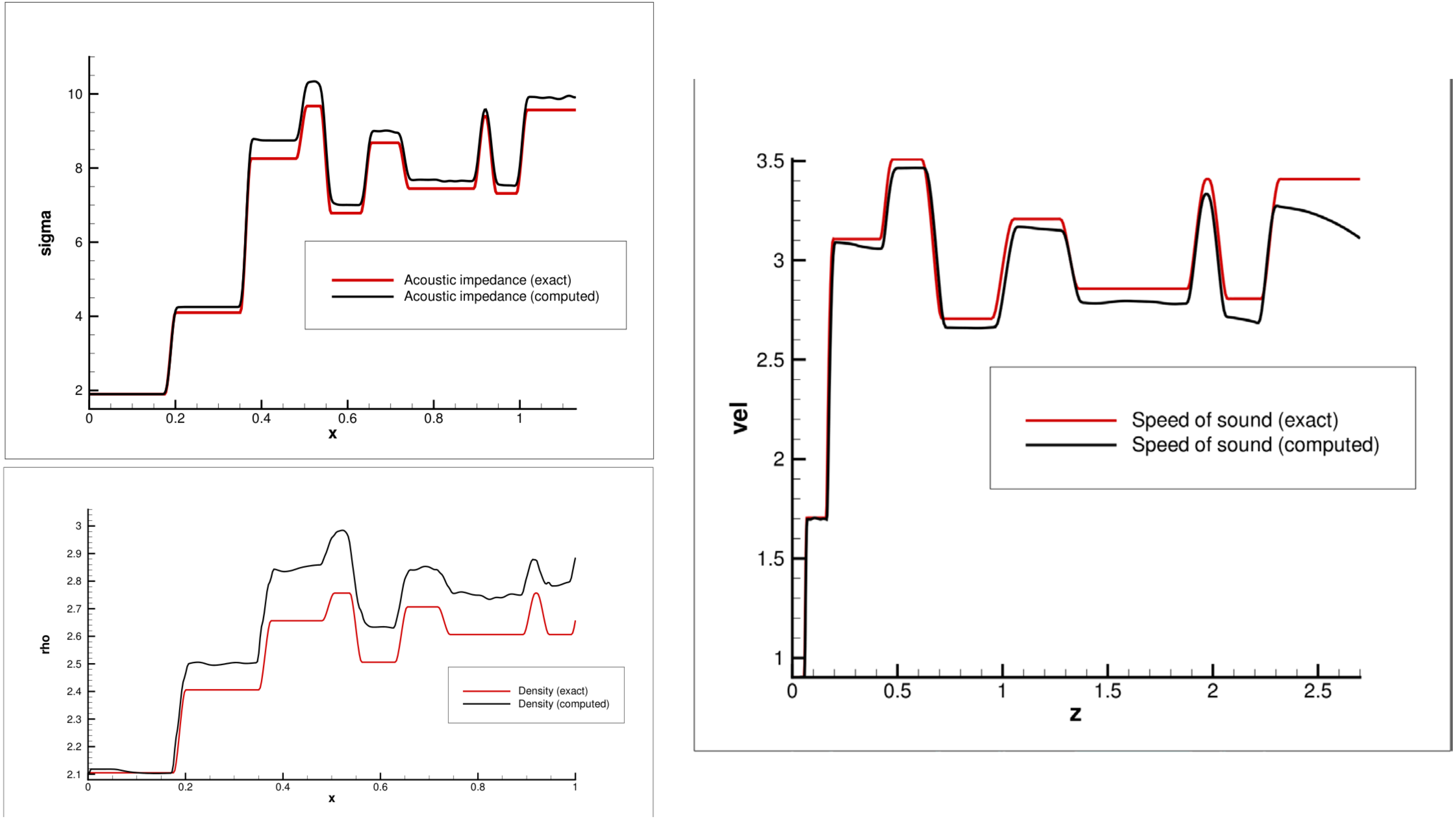


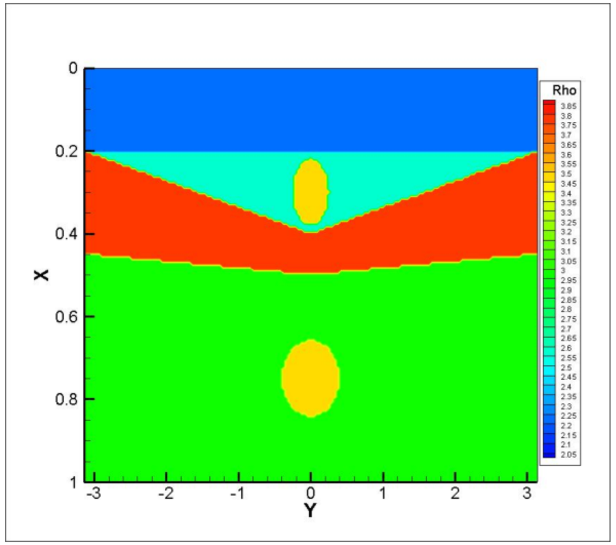
Затраты времени ЭВМ (в мс):

- SVD – красная кривая;

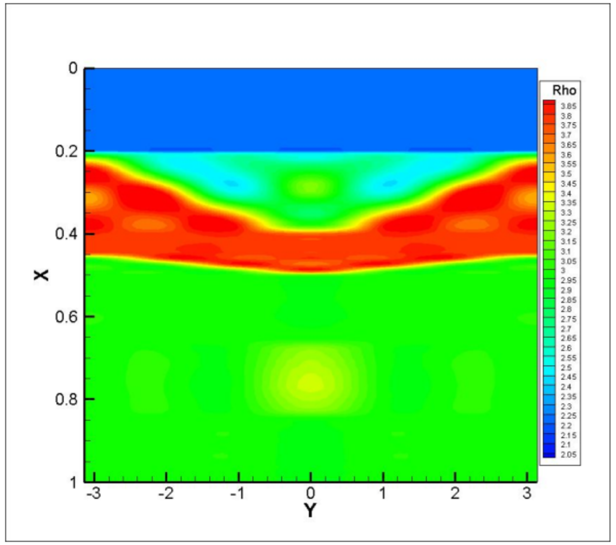
- Метод Монте-Карло с длинной цепью Маркова – синяя кривая.
- Метод Монте-Карло с короткой цепью Маркова – синяя кривая.

Расчеты показали, что для необходимой точности достаточно рассмотреть короткую цепь Маркова.

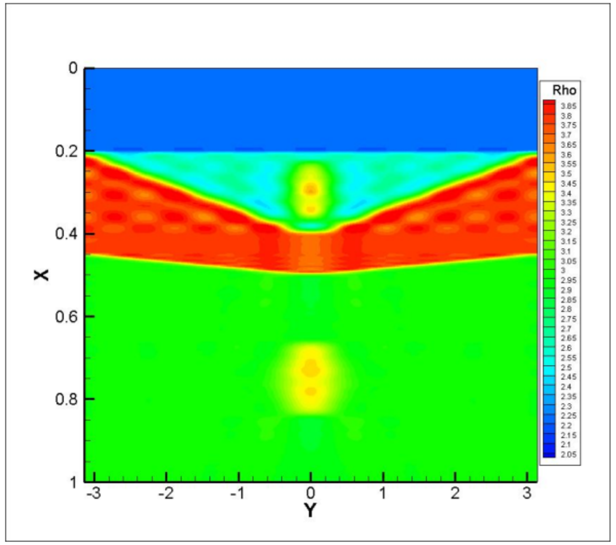

sigma
x
Acoustic impedance (exact)
Acoustic impedance (computed)
rho
x
Density (exact)
Density (computed)
vel
z
Speed of sound (exact)
Speed of sound (computed)



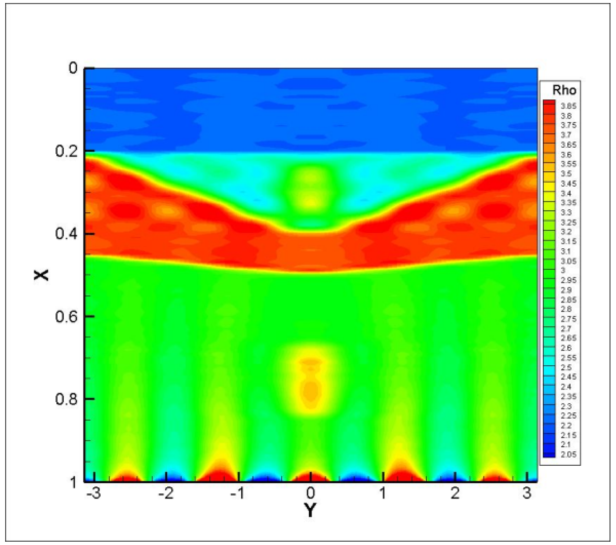
Exact solution



Reconstruction (7 sources)

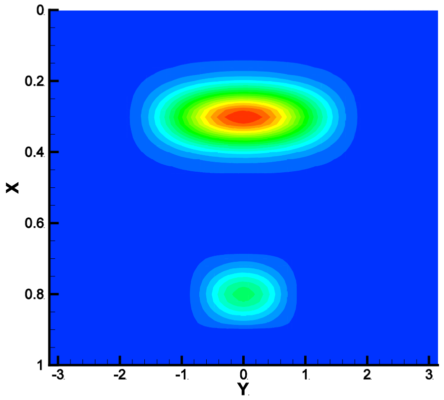


Reconstruction (15 sources)

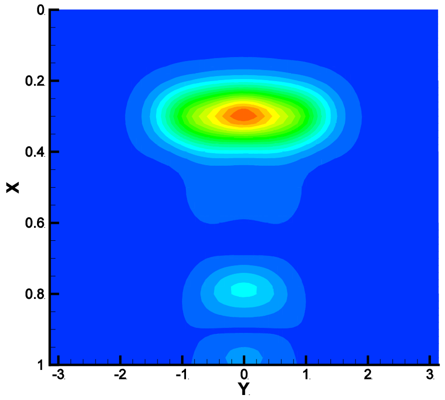


Reconstruction (15 sources, noise 5%)

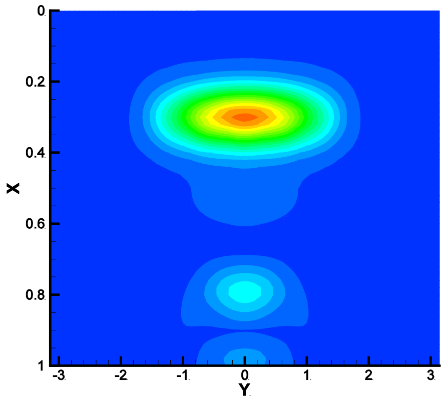
Численные расчеты



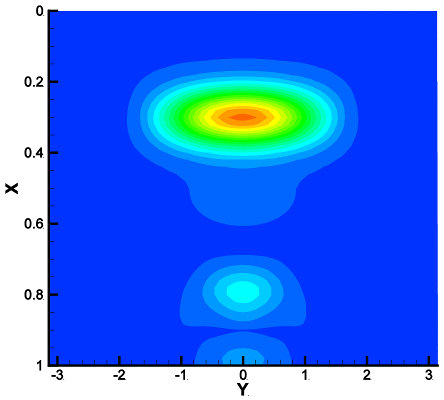
Точная модель



6 источников и 6 приемников

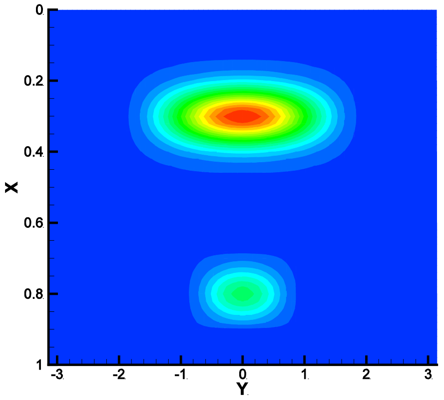


11 источников и 11 приемников

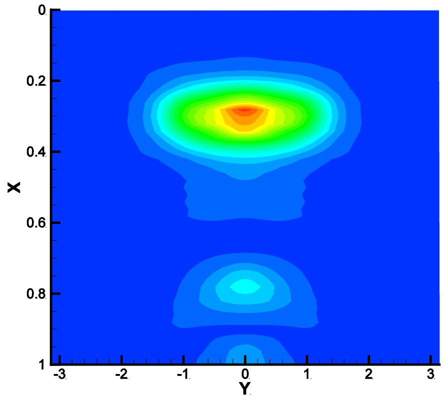


21 источник и 21 приемник

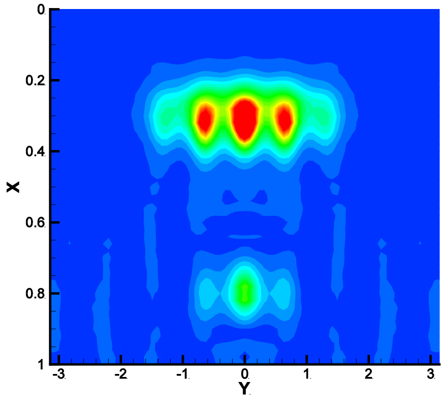
Численные расчеты, 2% ошибка



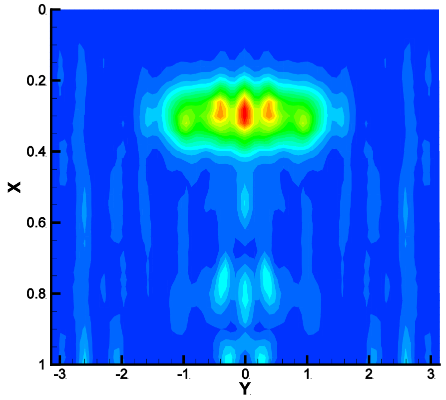
Точная модель



6 источников и 6 приемников

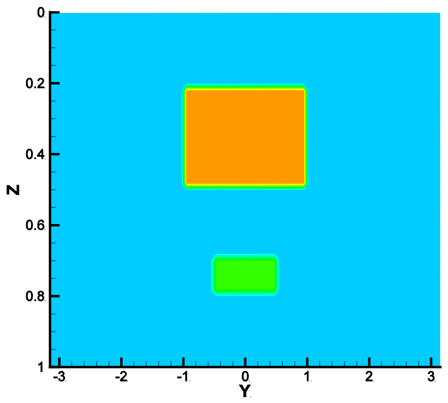


11 источников и 11 приемников

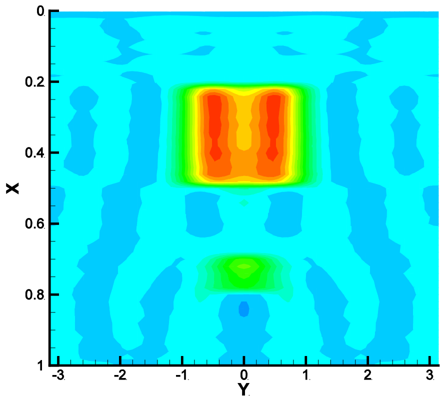


21 источник и 21 приемник

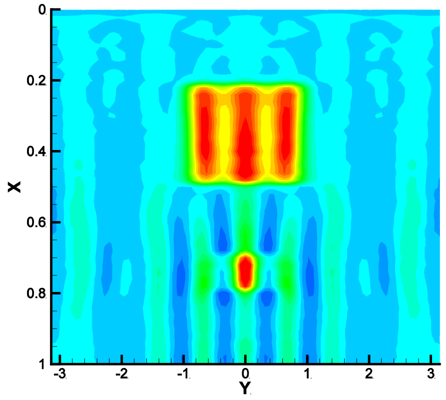
Численные расчеты, 2% ошибка



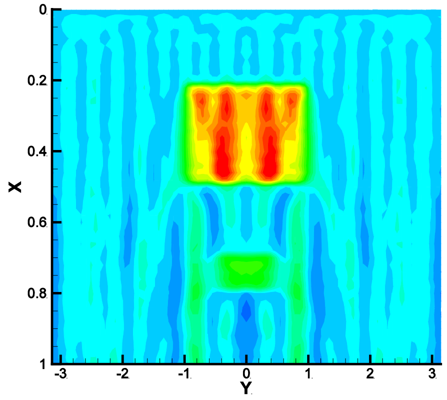
Точная модель



6 источников и 6 приемников



11 источников и 11 приемников



21 источник и 21 приемник

Последовательность прямых задач

$$c^{-2}(x,y)u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)}, \quad x \in R, \quad y \in R^2, \quad t > 0, \quad k = (k_1, k_2); \quad k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$u^{(k)}(x,y,0) = 0; \quad u_t^{(k)}(x,y,0) = e^{i(k,y)} \cdot \delta(x).$$

Требуется определить функцию *c(x,y)* по дополнительной информации

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t)$$

Пусть *τ(x,y)* есть решение задачи Коши для уравнений эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x,y), \quad x > 0, y \in R^2;$$

$$\tau(0,y) = 0, \quad \tau_x(0,y) = c^{-1}(0,y), \quad y \in R^2.$$

Введем новые переменные $z = \tau(x,y), \quad y = y$

и новые функции $v^{(k)}(z,y,t) = u^{(k)}(x,y,t), \quad b(z,y) = c(x,y)$

Многомерный аналог уравнения Крейна

$$\sum_m S^m(z,y) f_m^{k\,\prime}(t-z) + w^{(k)}(z,y,t) + \sum_m \int_{-z}^{z} f_m^{k\,\prime}(t-s) w^{(m)}(z,y,s)\,ds = 0,$$

$$|t| < z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$w^{(m)}(z,y,t) = S^{(m)}(z,y)\delta(z-t) + Q^{(m)}(z,y)\theta(z-t) + \tilde{w}^{(m)}(z,y,t)$$

$$\begin{cases} 2S_z^{(m)} + qS_y^{(m)} + pS^{(m)} = 0, \quad z > 0,\ y \in R^2, \\ S^{(m)}(0,y) = \dfrac{1}{2} e^{i(m,y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2Q_{zz}^{(m)} = S_{zz}^{(m)} - \left[qQ_y^{(m)} + b^2 S_{yy}^{(m)} + pQ^{(m)} \right], \quad z > 0,\ y \in R^2, \\ Q^{(m)}(0,y) = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$q(z,y) = 2b^2(z,y)\tau_y, \qquad p(z,y) = b^2(z,y)\left(\tau_{xx} + \tau_{zz}\right), \quad b(z,y) = c(x,y).$$

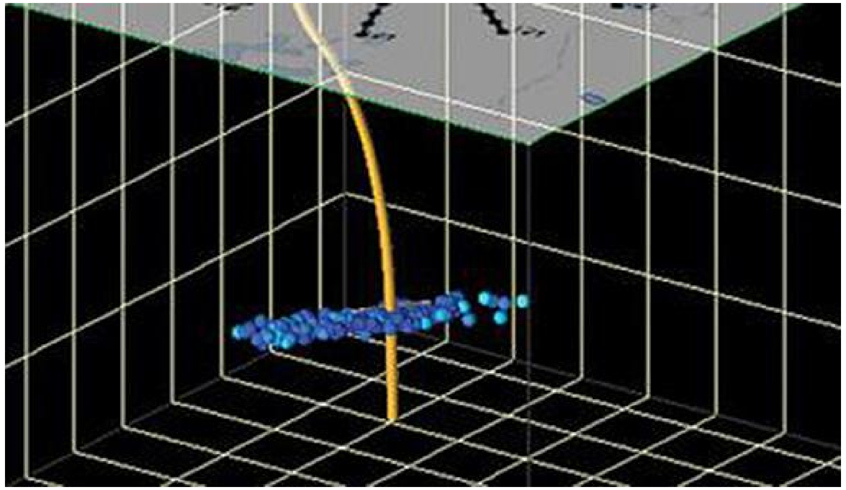
Микросейсмический мониторинг

Микросейсмический мониторинг является инновационной технологией контроля гидроразрыва пласта (ГРП).

Микросейсмика позволяет определять геометрию ГРП на достаточно больших расстояниях от места наблюдения (в скважинах или на поверхности), а также получать диагностические 3D изображения в процессе образования и развития разрыва.

Суть микросейсмического мониторинга заключается в регистрации сейсмоэмиссионных процессов, сопровождающих образование трещинной зоны ГРП. Технология позволяет получать данные для оперативной коррекции дизайна ГРП, минимизировать риски и оптимизировать увеличение отбора углеводородов при вовлечении в разработку трудноизвлекаемых запасов.

Существуют различные технологии скважинного и поверхностного микросейсмического мониторинга, базирующиеся, соответственно, на регистрации глубинного микросейсмического излучения как непосредственно в скважине ГРП, так и в соседних наблюдательных скважинах или на поверхности при помощи площадных сейсмических расстановок.



Микросейсмический мониторинг

$$c^{-2}(x,y,z)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln\rho(x,y,z)\nabla u$$

$$u|_{t=0} = \boldsymbol{q(x,y,z)}, \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L_x} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=L_y} = u_z\,|_{z=0} = u_z|_{z=L_z} = 0$$

Обратная задача: определить $q(x,y,z)$ по дополнительной информации

$$u^m(x_m, y_m, z_m, t) = \boldsymbol{f^m(t)}, m = 1, \dots, M.$$

Конечномерная дискретизация по пространству: прямая задача формулируется как задача Коши для уравнения второго порядка

$$U'' = AU, U(0) = Q,\ \ U'(0) = 0.$$

Здесь A – 7 диагональная матрица

Дискретизация по времени дает:

$$U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1} = \tau^2 AU^k, k = 1, \dots, N-1.$$

Рекуррентное соотношение

$$\begin{pmatrix} U^{k+1} \\ U^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I + \tau^2 A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^k \\ U^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I + \tau^2 A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} U^1 \\ U^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(k) & B_{12}(k) \\ B_{21}(k) & B_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^0 \end{pmatrix}$$

Размерность матриц B_{ij}: в 2D - 10^6 (число разбиений 1000), в 3D - 10^9.

Микросейсмический мониторинг. Тензорное разложение (совместная работа с Е.Е. Тыртышниковым, ИВМ РАН)

Положение источника в точке (x_m, y_m) на поверхности зададим вектором

$$S^m = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$$

Тогда данные обратной задачи связаны с решением следующим соотношением – скалярное произведение векторов:

$$F^{k,m} = (S^m, U^k)$$

$$\begin{pmatrix} U^{k+1} \\ U^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(k) & B_{12}(k) \\ B_{21}(k) & B_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I + 0.5\tau^2 A)Q \\ Q \end{pmatrix}$$

$$U^k = (B_{21}(k) \ + B_{22}(k))Q = B(k)Q$$

$$\left(S^m, U^k\right) = (S^m, B(k)Q)$$

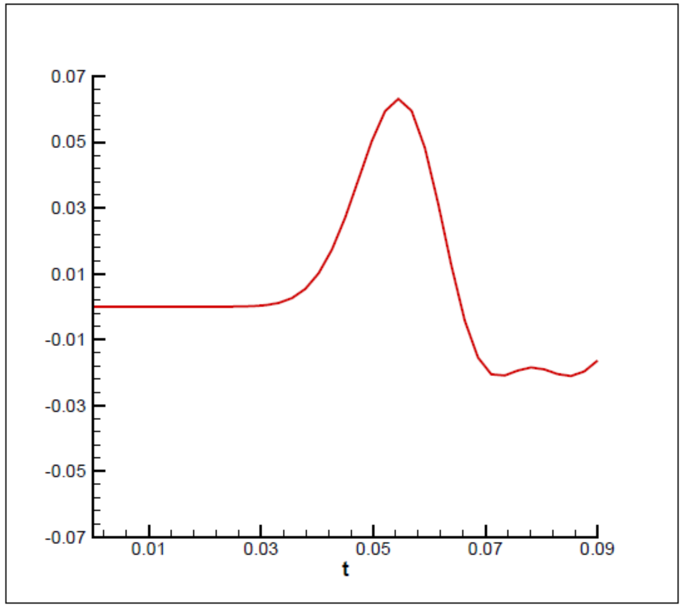
$$F^{k,m} = ([B(k)]^* S^m, Q), \qquad k = 0, \dots, N.$$

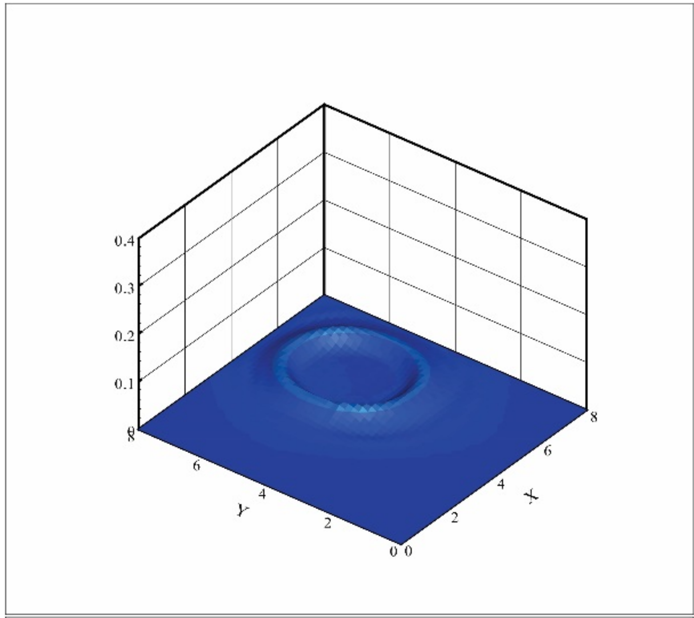
Получим следующую систему алгебраических уравнений:

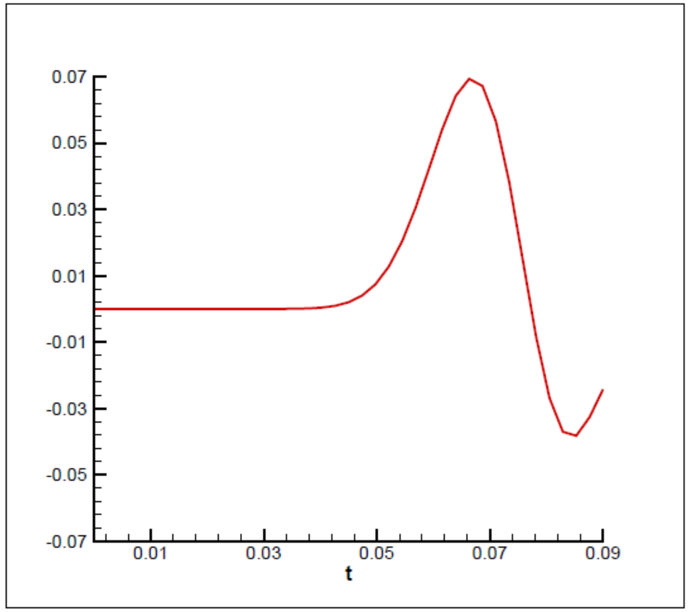
$$\begin{pmatrix} F^{0,m} \\ F^{1,m} \\ \vdots \\ F^{N,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B(0)]^* S^m \\ ([B(1)]^* S^m \\ \vdots \\ ([B(N)]^* S^m \end{pmatrix} Q, \qquad m = 1, \dots, M.$$

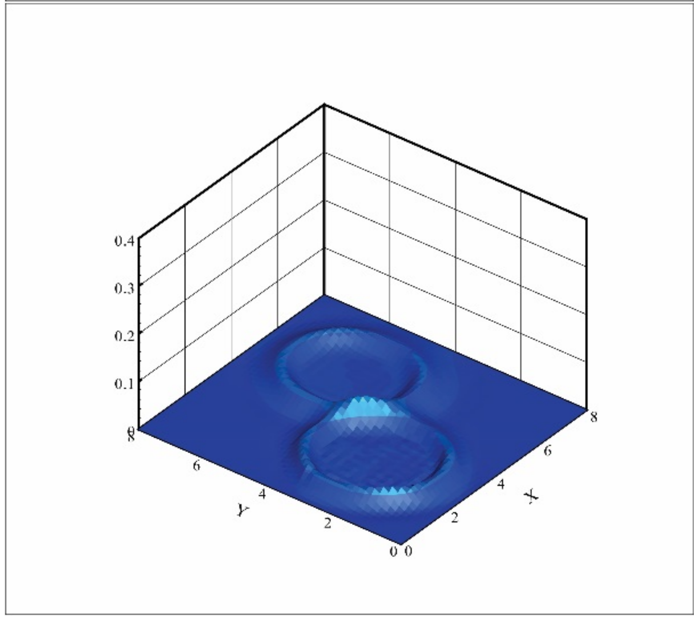
Микросейсмический мониторинг. Тензорное разложение (совместная работа с Е.Е. Тыртышниковым, ИВМ РАН)

Тензорное разложение: увеличение размера сетки на порядок по каждой переменной, уменьшение требования к памяти в несколько раз, уменьшение времени счета на порядок







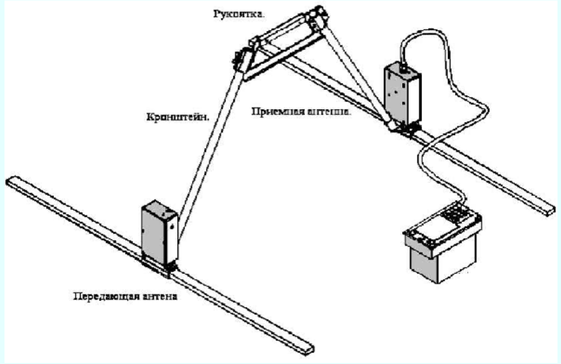


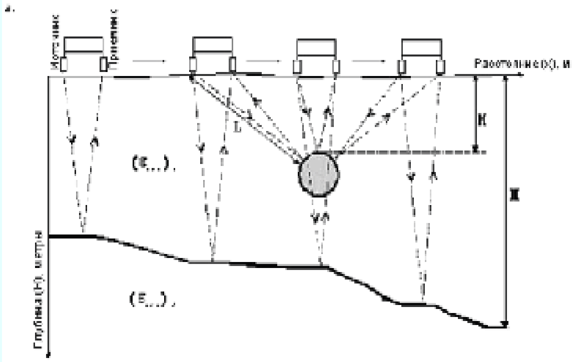
Георадар «ЛОЗА-В»

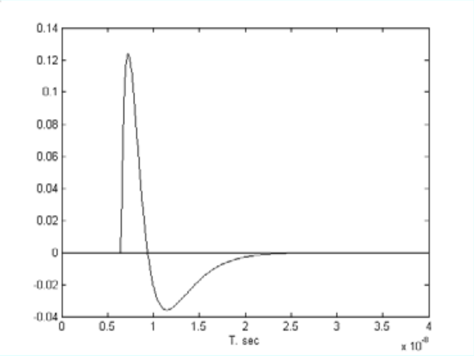
Диапазон рабочих частот 50-300 МГц

Дискретность отсчета данных - 1.2 наносекунд

Длинна антенн - 1 м

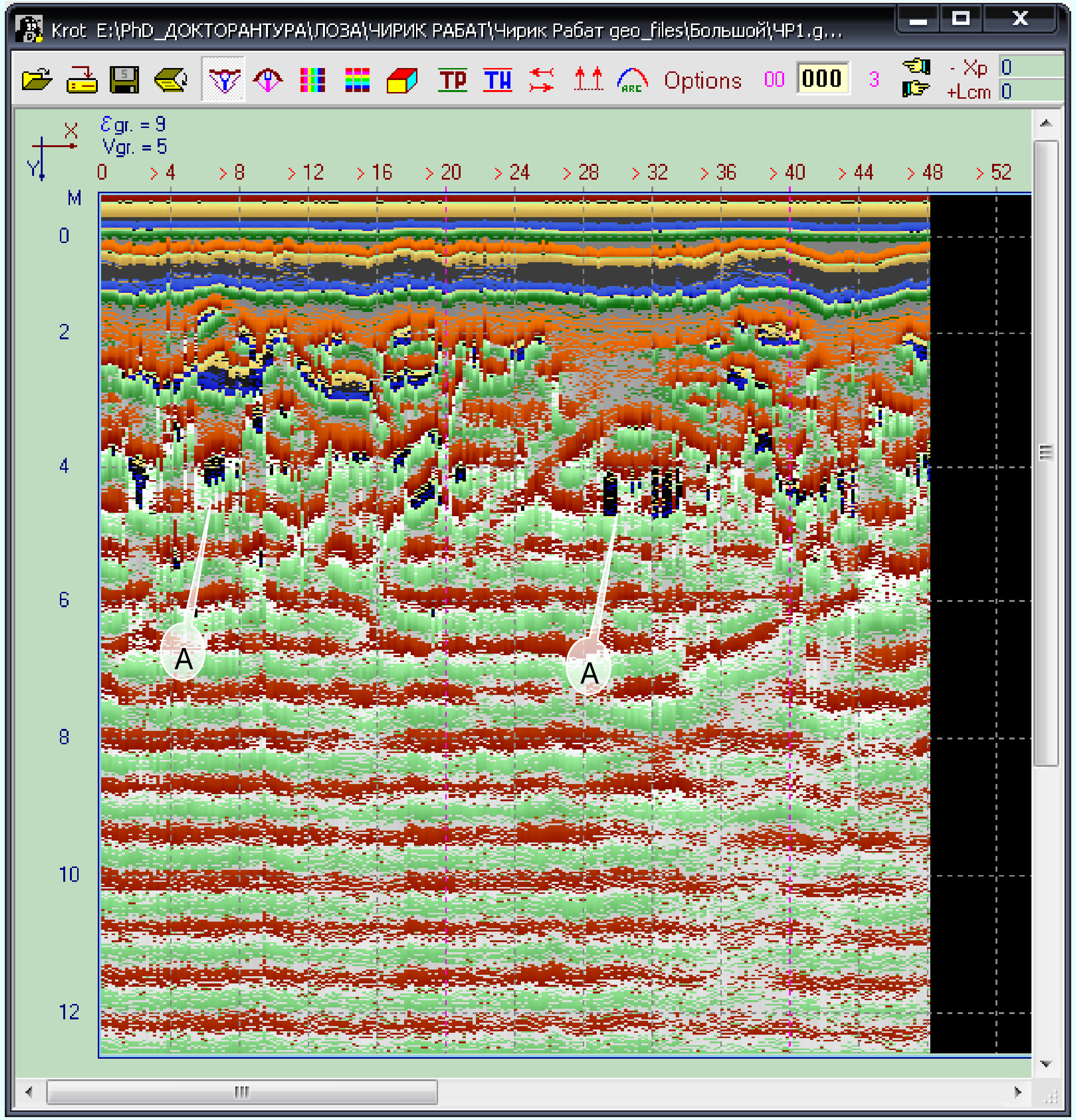






Максимальная глубина зондирования в грунтах на частоте 100 МГц

Среда	ε	Глубина, м	Разрешение по шлубине, м
Сухой песок	2.6	42	0.1
Влажный песок	25	25	0.03
Глина сухая	2.4	13	0.1
Глина влажная	15	3	0.07



Данные георадара

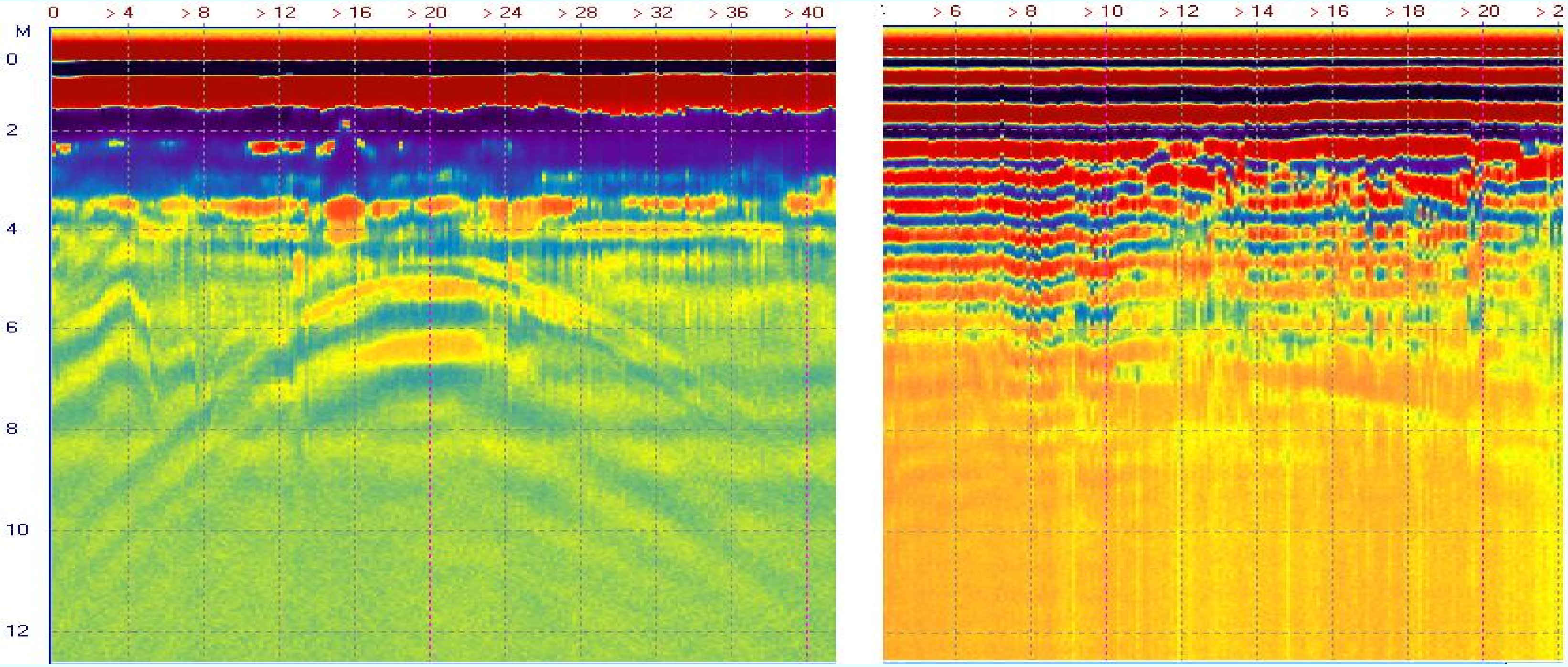
Диагностика взлетно-посадочной полосы аэродрома в Алматинской области.

Участниками проекта по заказу коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области Республики Казахстан была проведена диагностика участка взлетно-посадочной полосы с явным дефектом.

Требовалось провести исследование структуры грунта на предмет обнаружения причин дефекта поверхности полосы **неразрушающим методом**.

Результаты «просвечивания» участка взлетно-посадочной полосы

Диагностика структуры грунта проводилась с помощью георадара «Лоза». На полученных радарограммах наблюдается картина, характерная для отражения от подземного объекта (куполообразные волновые профили).

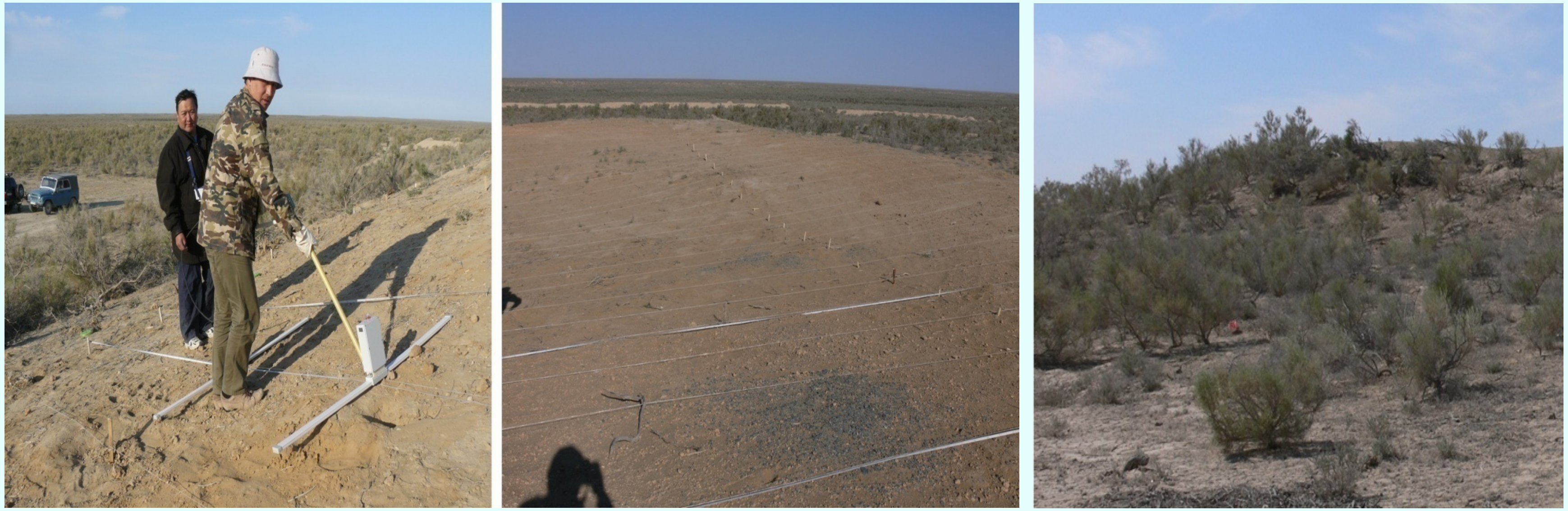


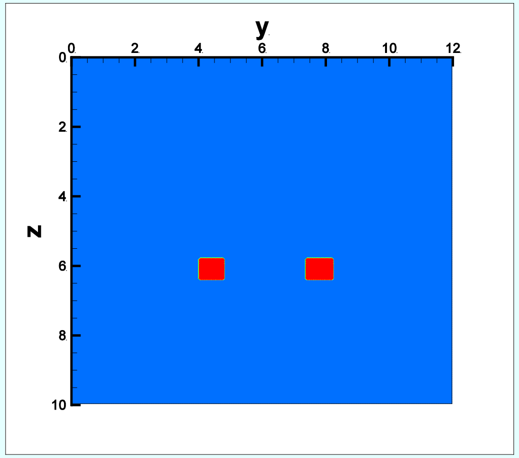
В результате обработки данных обнаружен объект типа трубы, который проходит по косой к взлетно-посадочной полосе.

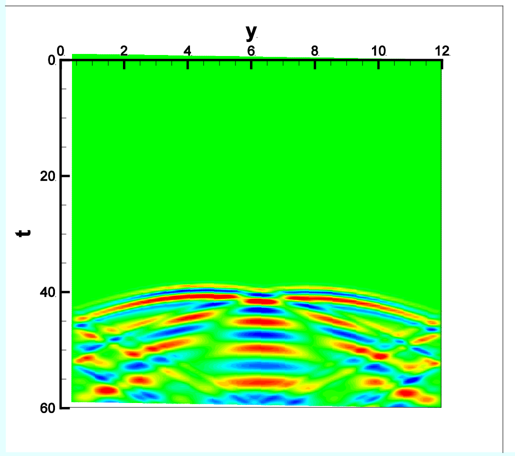
Исследование курганов в Кзыл-ординской области Республики Казахстан с помощью георадара “Лоза”.

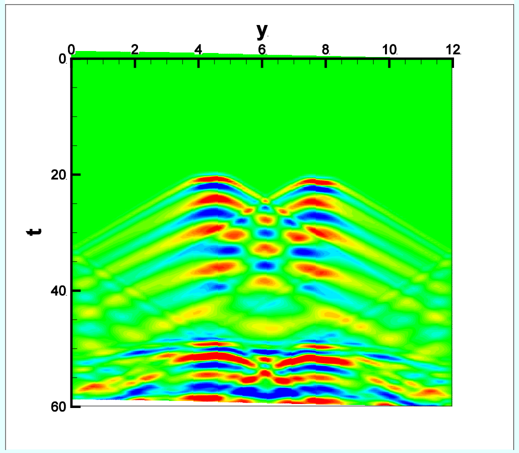
Была поставлена задача восстановить внутреннее строение насыпей в Кзыл-Ординской области и обнаружить древние места захоронения и осколки от могильных камней и мавзолеев.

Просвечиваемый участок состоял из большого холма, малого холма и небольшого перешейка между ними.



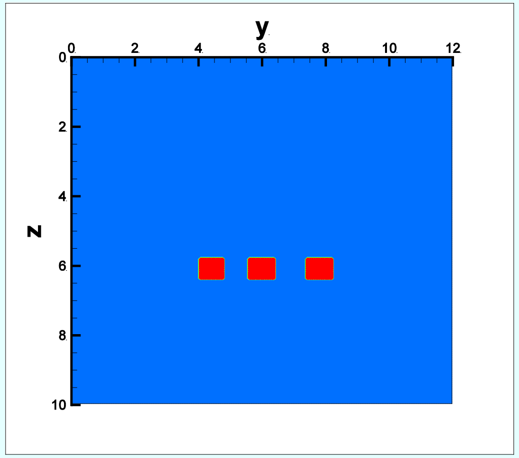


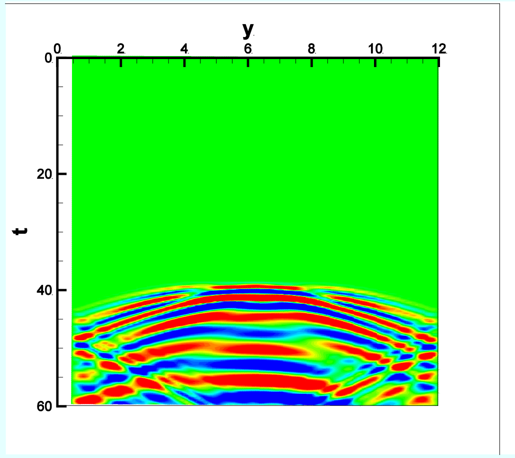


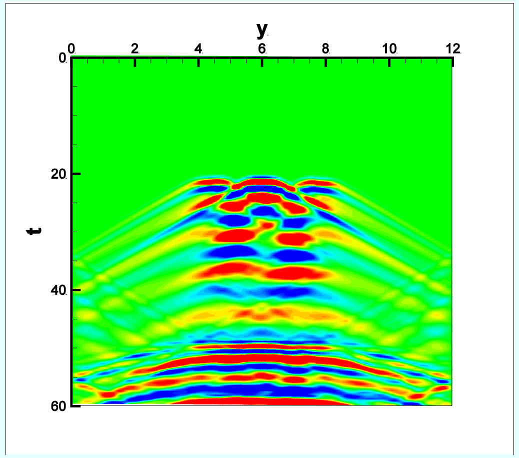


Данные, измеряемые на поверхности

Результат решения задачи продолжения до глубины 5 м







Благодарю за внимание!