РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

О работах профессора А.Д. Гаджиева в РФЯЦ-ВНИИТФ

***Э.М. Вазиев**, С.Ю. Кузьмин, С.Н. Лебедев, Е.М. Романова, Л.В. Соколов, А.А. Шестаков*

Забабахинские научные чтения, 2023

Ахмед Далгатович Гаджиев за рабочим столом (1980-е годы)

Биографическая справка

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

- Ахмед Далгатович Гаджиев родился 21 октября 1937 года в Дагестане, в селе Хунзах.
- В 1960 году окончил Ленинградский Государственный университет по специальности «вычислительная математика» и поступил на работу во ВНИИТФ.
- В 1974 году успешно защитил кандидатскую диссертацию, посвященную численному решению уравнения переноса нейтронов.
- В 1982 году стал лауреатом Государственной премии СССР.
- В 1992 году защитил докторскую диссертацию по неявным численным методам «ромбического» типа.
- Профессор (с 1997 года), заслуженный деятель науки РФ (с 2002 года).
- С 2022 года на пенсии, проживает в городе Санкт-Петербург.

Методы решения уравнения переноса нейтронов

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\upsilon}N\right)+\Omega\nabla N+\alpha N=\frac{\beta}{4\pi}\int_{\Omega}N\left(r,\Omega',t\right)d\Omega'+\frac{1}{4\pi}f\left(r,t\right)$$

TL-метод – представление $N(x,\theta,\mu,\psi,t)$ через разложение в ряд Фурье по системе функций $T_l=\cos(l\psi)$:

$$N\left(x,\theta,\mu,\psi,t\right)=\sum_{l}\Phi_l\left(x,\theta,\mu,t\right)T_l\left(\psi\right),$$

$$\text{где } \Phi_l\left(x,\theta,\mu,t\right)=\frac{2}{1+\delta_{l0}}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}N\left(x,\theta,\mu,\psi,t\right)T_l\left(\psi\right)d\psi$$

Метод решения 2D уравнения переноса в криволинейных (полярных) координатах для осевращательной системы с подвижным (связанным с плоскостью вращения) базисом в пространстве полета частиц с использованием «ромбовой» модели S_n-метода.

А.Д. Гаджиев. TL-метод решения двумерного нестационарного уравнения переноса нейтронов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, том 16, номер 4, 969–977

А.Д. Гаджиев, О.С. Широковская. О численном решении двумерного уравнения переноса в криволинейных координатах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, том 16, номер 6, 1605–1609

Решение уравнений динамики теплопроводного газа

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

На примере уравнений акустики

$$\frac{\partial p}{\partial t}+a^2\frac{\partial u}{\partial m}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial m}=0$$

с использованием инвариантов $r = p - au$, $s = p + au$ выполнен переход к двум отдельным уравнениям переноса

$$\frac{\partial r}{\partial t}-a\frac{\partial r}{\partial m}=0,\quad \frac{\partial s}{\partial t}+a\frac{\partial s}{\partial m}=0.$$

Для численного решения уравнений переноса применены соотношения связи

$$r_{i+1/2}=\gamma_i r_i+\left(1-\gamma_i\right)r_{i+1},\ s_{i+1/2}=\left(1-\gamma_i\right)s_i+\gamma_i s_{i+1},$$
$$r^{n+1/2}=\gamma_n r^{n+1}+\left(1-\gamma_n\right)r^n,\ s^{n+1/2}=\gamma_n s^{n+1}+\left(1-\gamma_n\right)s^n.$$

Соотношения связи для исходных величин:

$$p_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left(p_i+p_{i+1}\right)+\frac{2\gamma_i-1}{2}a\left(u_{i+1}-u_i\right),\ u_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left(u_i+u_{i+1}\right)+\frac{2\gamma_i-1}{2a}\left(p_{i+1}-p_i\right),$$
$$p^{n+1/2}=\gamma_n p^{n+1}+\left(1-\gamma_n\right)p^n,\ u^{n+1/2}=\gamma_n u^{n+1}+\left(1-\gamma_n\right)u^n.$$

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, том 19, номер 5, 1288–1303.

А.Д. Гаджиев. О сходимости конечно-разностного метода «Ромб» решения гиперболических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, том 22, номер 4, 871–879.

Решение уравнений динамики теплопроводного газа

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

$$\oint_L \upsilon \cdot dm + R^k u \cdot dt = 0,$$

$$\oint_L R^k p \cdot dt - u \cdot dm - \iint_\Delta k \frac{p\upsilon}{R} dt \cdot dm = 0,$$

$$\oint_L R^k \left(up + S\right) dt - E \cdot dm = \iint_\Delta Q dt \cdot dm$$

В численной схеме для решения уравнений газовой динамики использованы соотношения связи

$$p_{i+1/2}^{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(p_i^{\nu+1} + p_{i+1}^{\nu+1}\right) + \frac{2\gamma_i - 1}{2} b_{i+1/2}^{\nu}\left(u_{i+1}^{\nu+1} - u_i^{\nu+1}\right),\ u_{i+1/2}^{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(u_i^{\nu+1} + u_{i+1}^{\nu+1}\right) + \frac{2\gamma_{i-1} - 1}{2b_{i+1/2}^{\nu}}\left(p_{i+1}^{\nu+1} - p_i^{\nu+1}\right).$$

Гибридная схема:

$$\gamma_i = \gamma_n = \begin{cases} 0.5, & \text{если } \left(\operatorname{div} u\right)_{i+1/2}^{\nu} \geq 0, \\ 1, & \text{если } \left(\operatorname{div} u\right)_{i+1/2}^{\nu} < 0. \end{cases}$$

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, том 19, номер 5, 1288–1303.

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев, А.А. Шестаков. Метод расчёта двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, том 22, номер 2, 339–347.

Решение уравнений динамики теплопроводного газа

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

В численной схеме для решения уравнения теплопроводности использованы соотношения связи

$$T_{i+1/2}^{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(T_i^{\nu+1}+T_{i+1}^{\nu+1}\right)+\frac{2\gamma_i-1}{2a_{i+1/2}^{\nu}}\left(S_{i+1}^{\nu+1}-S_i^{\nu+1}\right),\ S_{i+1/2}^{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(S_i^{\nu+1}+S_{i+1}^{\nu+1}\right)+\frac{2\gamma_i-1}{2}a_{i+1/2}^{\nu}\left(T_{i+1}^{\nu+1}-T_i^{\nu+1}\right)$$

Гибридная схема:

$$\gamma_i=\begin{cases}0.5, & \text{если } \left|T_{i+1}-T_i\right|\le\delta\left|T_i+T_{i+1}\right|,\\ 1, & \text{если } \left|T_{i+1}-T_i\right|>\delta\left|T_i+T_{i+1}\right|.\end{cases}$$

При γ=0.5 схема имеет погрешность аппроксимации вида $O(\tau,\ h^2)$ и условие на монотонность решения:

$$\frac{\kappa\tau}{h^2}>\frac{1}{4}.$$

При γ=1.0 схема является монотонной, но негибкой, погрешность аппроксимации имеет вид $O(\tau,\ h\tau^{-1/2})$.

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, том 19, номер 5, 1288–1303.
А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев, А.А. Шестаков. Метод расчёта двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, том 22, номер 2, 339–347.

Развитие схемы РОМБ для решения уравнения диффузии

Изменены соотношения связи:

$$T_{i+1/2}^{n+1}=\frac{1}{2}\left(T_i^{n+1}+T_{i+1}^{n+1}\right)+\delta\left(S_{i+1}^{n+1}-S_i^{n+1}\right),\ S_{i+1/2}^{n+1}=\frac{1}{2}\left(S_i^{n+1}+S_{i+1}^{n+1}\right)+\theta\left(T_{i+1}^{n+1}-T_i^{n+1}\right)-\sigma\theta\left(T_{i+1}^{n}-T_i^{n}\right)$$

Схема перестала быть негибкой, сохранился гибридный характер схемы с возможностью локального повышения точности при сохранении монотонности решения.

Схема была использована для решения:

- уравнения теплопроводности;
- уравнения переноса излучения в диффузионном и P_1 приближениях.

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев, В.В. Рыкованова, А.А. Шестаков. Методика и программа ТОМ1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 1985, вып. 1, 53–65.

В.Н. Писарев. Параметрическое семейство схем «РОМБ» для одномерного уравнения теплопроводности // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 1986, вып. 2, 67–75.

А.Д. Гаджиев, А.А. Шестаков. Метод «РОМБ» для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 приближении // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 1989, вып. 3, 66–70.

Схема РОМБ для решения двумерных уравнений газовой динамики

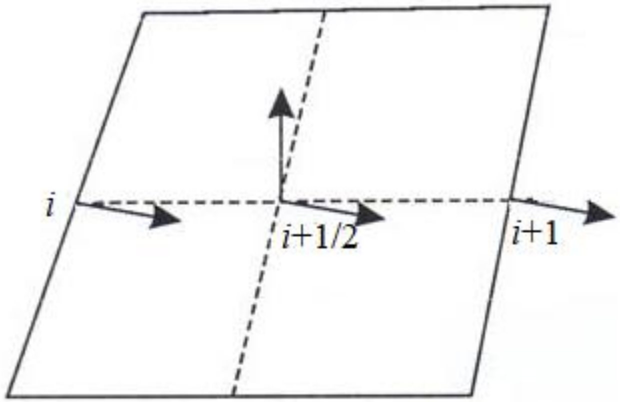
РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Метод РИД: явно-неявная схема, где метод РОМБ используется при решении уравнения диффузии для определения давления.

Метод РОМБ для уравнений газовой динамики:

$$p = P + \delta ha \cdot \operatorname{div}(\mathbf{U}),\ \mathbf{u} = \mathbf{U} + \frac{\theta h}{a} \operatorname{grad}(P).$$

$$P_{i+1/2}^{\nu+1} = \frac{P_{i+1}^{\nu+1} + P_i^{\nu+1}}{2},\ W_{i+1/2}^{\nu+1} = \frac{W_{i+1}^{\nu+1} + W_i^{\nu+1}}{2}$$



Метод демонстрирует второй порядок точности на гладких решениях.

А.Д. Гаджиев, С.Н. Лебедев. Явно-неявный метод РИД расчета задач газовой динамики // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 1987, вып. 1, 49–53.
А.Д. Гаджиев, С.Ю. Кузьмин, С.Н. Лебедев, В.Н. Писарев. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для решения двумерных уравнений газовой динамики // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2001, вып. 4, 11–21.
А.Д. Гаджиев, С.Ю. Кузьмин. Исследование схемы РОМБ для решения двумерных уравнений газодинамики методом априорных оценок // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2001, вып. 4, 22–29.

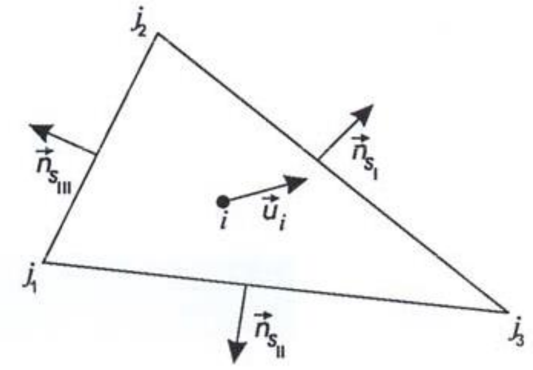
Обобщение методов РОМБ на случай нерегулярных сеток

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Введение искусственной диссипации:

$$p = P + \delta h a \cdot \mathrm{div}(\mathbf{U}),\ \mathbf{u} = \mathbf{U} + \frac{\theta h}{a}\mathrm{grad}(P).$$

Соотношения связи для треугольников:



$$P_i^{\nu+1} = \frac{1}{3}\left(P_{s_1}^{\nu+1} + P_{s_2}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1}\right),\ \mathbf{U}_i^{\nu+1} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{U}_{s_1}^{\nu+1} + \mathbf{U}_{s_2}^{\nu+1} + \mathbf{U}_{s_3}^{\nu+1}\right)$$

При решении уравнения теплопроводности также вводится искусственная диссипация. В качестве соотношения связи для диссипативной температуры используется:

$$U_i^{\nu+1} = \frac{1}{3}\left(U_{s_1}^{\nu+1} + U_{s_2}^{\nu+1} + U_{s_3}^{\nu+1}\right),$$

а соотношения связи для диссипативного потока строятся с использованием метода наименьших квадратов.

Э.М. Вазиев, А.Д. Гаджиев, С.Ю. Кузьмин. Неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2006, вып. 4, 15–28.

А.Д. Гаджиев, С.А. Новаковская, А.А. Шестаков. Неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2007, вып. 1, 3–13.

Методы решения уравнения переноса излучения

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial J_\nu}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla J_\nu+(\alpha_{c\nu}+\alpha_s)J_\nu=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}B_\nu+\alpha_s U_\nu\right),$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\int_0^\infty \alpha_{c\nu}(U_\nu-B_\nu)d\nu$$

- DDAD-метод: модификация DD-St метода с введением искусственной диссипации с двумя параметрами δ и θ при неизвестной функции и при правой части.
- DDAD-TVDR-метод: модификация DDAD метода с применением TVD-подобной реконструкции.
- Различные варианты TVD методов на основе DD-St схемы.

А.Д. Гаджиев, И.А Кондаков, В.Н. Писарев, О.И. Стародумов, А.А. Шестаков. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2003, вып. 4, 13–24.
А.Д. Гаджиев, В.Н. Селезнев, А.А. Шестаков. DS$_n$-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод с ускорением итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2003, вып. 4, 33–46.
А.Д. Гаджиев, В.В. Завьялов, А.А. Шестаков. Применение TVD-подхода к DS$_n$-методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной *RZ*-геометрии // ВАНТ, сер. Мат. моделирование физ. процессов, 2010, вып. 2, 30–39.

Методы РОМБ за пределами ВНИИТФ

РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

- Христенко Е. А., Лаева В. И. Схема “Ромб” решения одномерной задачи теплопроводности в многослойной пластине // Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, ТГУ, Томск, 2016.

- Атамасова Е.С., Лаева В.И. Конечно-разностная схема "Ромб“ для численного решения уравнения конвекции-диффузии // Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, ТГУ, Томск, 2019.

- Новаковский Н.С. Математическое моделирование безударного сильного сжатия газовых слоев с одномерной симметрией при возрастании радиуса сжимающего поршня // Диссертация на соискание научной степени кандидата физ.-мат. наук, Екатеринбург, 2017.

Заключение

Главные направления деятельности А.Д. Гаджиева.

- Разработка, численная отработка и теоретическое обоснование новых методов решения многомерных кинетических уравнений для сложных геометрий.
- Разработка и обоснование нового эффективного конечно-объемного метода «РОМБ» для численного решения уравнений математической физики на неортогональных сетках с большими деформациями.

Под руководством Ахмеда Далгатовича разработанные методы реализованы в одномерных и двумерных программных комплексах.

А.Д. Гаджиев является автором более 150 научных работ. Под его руководством защищено 9 кандидатских диссертаций.

Спасибо за внимание