Разрешимость системы уравнений для описания неоднородных изотермических течений с вертикальной скоростью

Бурмашева Наталья Владимировна
Евгений Юрьевич Просвиряков

Уральский федеральный университет
имени первого президента России Б.Н. Ельцина,
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН,

+79826545223, evgen_pros@mail.ru

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИФФУЗИИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + g(\beta_1 T + \beta_2 C)\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)T = (\chi + \alpha^2 dn)\Delta T + \alpha dn\Delta$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)C = d\Delta C + \alpha d\Delta T,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0.$$

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ

$$V_x(x,y,z,t) = U(z,t) + xu_1(z,t) + yu_2(z,t),$$

$$V_y(x,y,z,t) = V(z,t) + xv_1(z,t) + yv_2(z,t),$$

$$V_z(z,t) = w(z,t),$$

$$P(x,y,z,t) = P_0(z,t) + xP_1(z,t) + yP_2(z,t) + \frac{x^2}{2}P_{11}(z,t) + \frac{y^2}{2}P_{22}(z,t) + xyP_{12}(z,t),$$

$$T(x,y,z,t) = T_0(z,t) + xT_1(z,t) + yT_2(z,t) + \frac{x^2}{2}T_{11}(z,t) + \frac{y^2}{2}T_{22}(z,t) + xyT_{12}(z,t),$$

$$C(x,y,z,t) = C_0(z,t) + xC_1(z,t) + yC_2(z,t) + \frac{x^2}{2}C_{11}(z,t) + \frac{y^2}{2}C_{22}(z,t) + xyC_{12}(z,t)$$

НЕОДНОРОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

КЛАССИЧЕСКИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КУЭТТА, СТОКСА, ПУАЗЕЙЛЯ, НУССЕЛЬТА

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V},$$

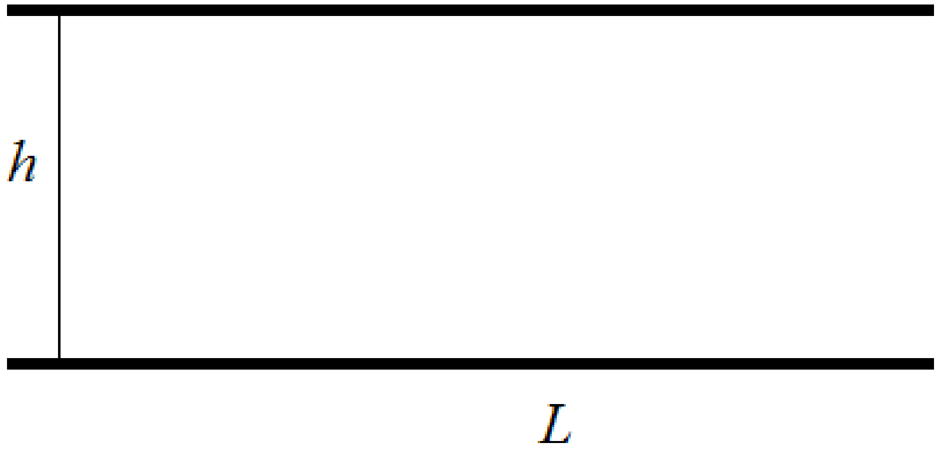
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \text{ – полная производная}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

$$\cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \equiv 0$$

Вязкие силы преобладают над силами инерции

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРУПНОМАСШАБНОСТИ



$$\delta = \frac{h}{L} \ll 1$$

$$V_z = 0,$$

$$P = \text{const}.$$

Переопределенная система уравнений

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Точное решение системы уравнений Навье-Стокса принадлежит классу Линя-Сидорова-Аристова

$$V_x = U + xu_1 + yu_2\,,\quad V_y = V + xv_1 + yv_2\,.$$

Все функции зависят от координаты *z* и времени *t*.

$$\hat{L}u_2 + u_1 u_2 + u_2 v_2 = 0\,,\ \hat{L}v_1 + u_1 v_1 + v_1 v_2 = 0\,,$$

$$\hat{L}u_1 + u_1^2 + u_2 v_1 = 0\,,\ \hat{L}v_2 + u_2 v_1 + v_2^2 = 0\,,$$

$$\hat{L}U + U u_1 + V u_2 = 0\,, \hat{L}V + U v_1 + V v_2 = 0\,,$$

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

$$u_1 + v_2 = 0\,.$$

В этом случае общее краевой задачи записывается следующим образом:

$$u_1 = u \cos\theta \sin\theta\,,\ u_2 = u \cos^2\theta\,,\ v_1 = -u \sin^2\theta\,,\ v_2 = -u \cos\theta \sin\theta\,.$$

Здесь θ – произвольная постоянная, а функция u удовлетворяет операторному уравнению:

$$\hat{L}u = 0\,.$$

Сформулируем граничные условия для системы На нижней границе $z = 0$ выполнятся условия прилипания:

$$U = V = 0\,,\; u = 0\,,$$

на верхней границе $z = h$ заданы скорости:

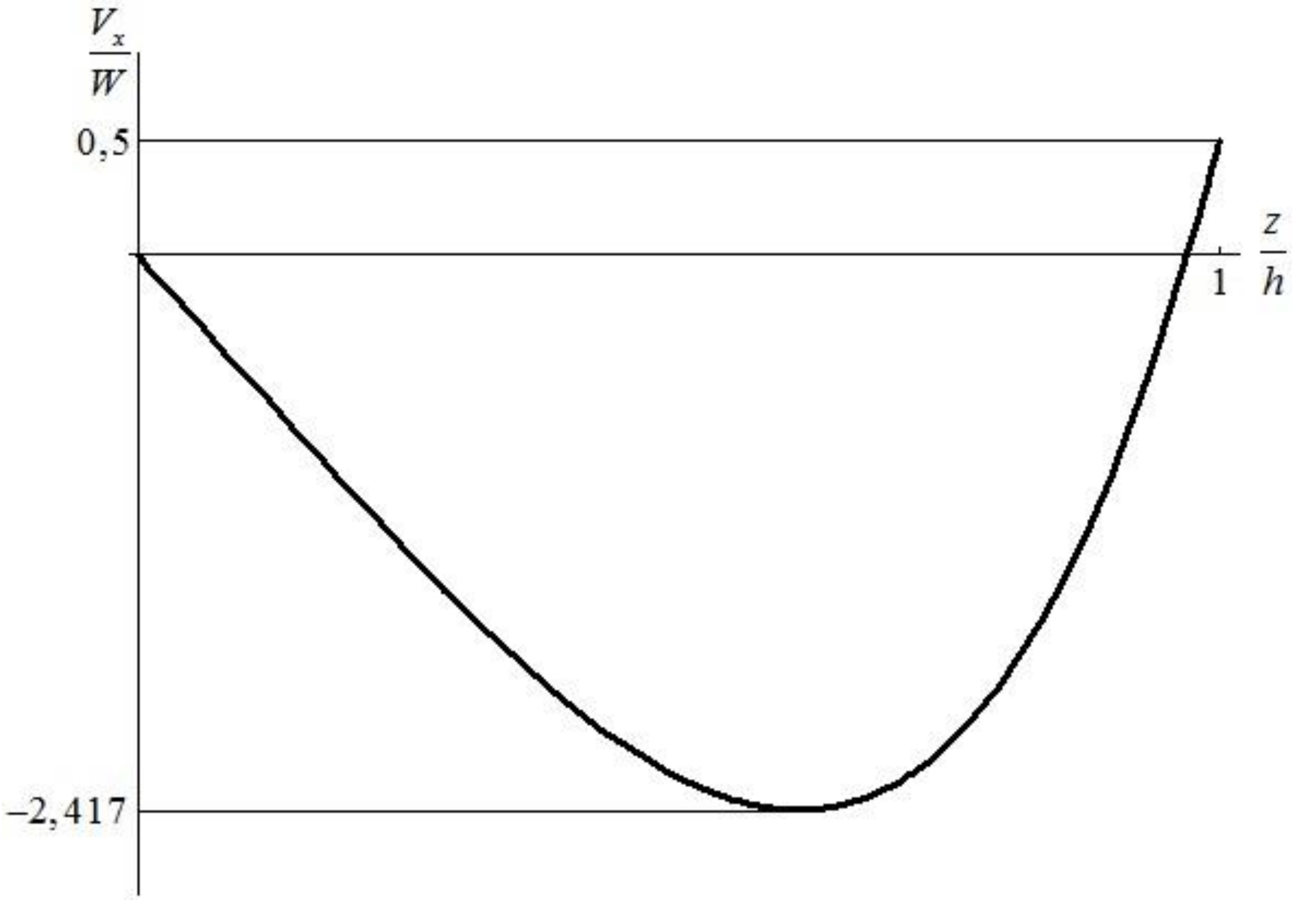
$$U = W\cos\varphi\,,\; u = \Omega\,,\; V = W\sin\varphi\,,$$

где $\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \equiv u$ – вертикальная компонента завихренности на свободной поверхности, вычисленная согласно формулам. Здесь W — значение скорости на поверхности слоя жидкости, а угол φ — это направление этой скорости, относительно выбранной системы координат.

Решение краевой задачи

$$U = \frac{\Omega W \sin\varphi h^2}{12\nu}\frac{z}{h}\left(\left(\frac{z}{h}\right)^3 - 1\right) + W\cos\varphi\frac{z}{h},$$

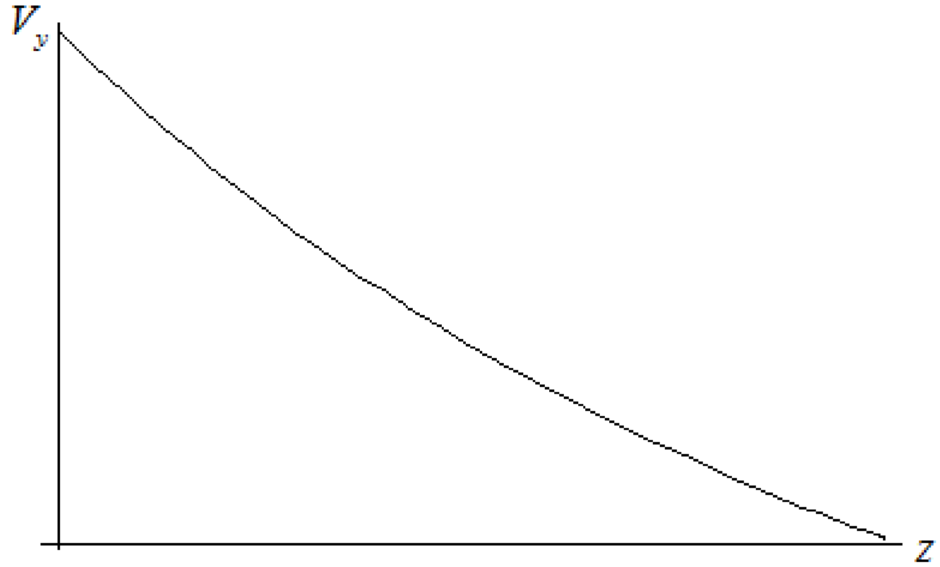
$$u = \Omega\frac{z}{h},\; V = W\sin\varphi\frac{z}{h}.$$



Вторая задача Стокса (1851)

Точное решение для полупространства, записанное в терминах огибающей

$$V_y = -A\exp(-kz)\sin(kz - \omega t),\ V_x = V_z = 0,\ P = 0.$$



Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. Camb. Philo. Trans. 1851. Vol. 9. P. 8-106.

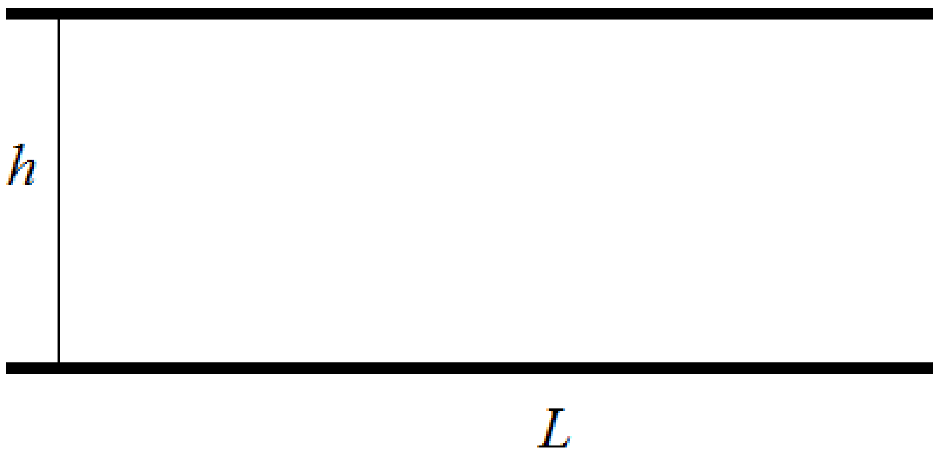
Bukreev V.I. Experimental investigation of the range of applicability of the solution of Stokes's second problem. Fluid Dynamics . 1988. Vol. 23. №4. P. 504-509.

Крупномасштабные волновые движения Стокса в вертикально завихрнной вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной полосе

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0.$$



$$\delta=\frac{h}{L}\ll 1$$

Решение второй задачи для вертикально завихренной жидкости будем искать в следующем виде

$$V_x = U(z,t) + u(z,t)y = U(z,t) + \Omega\frac{z}{h}y,\; V_y = V(z,t).$$

Здесь $\Omega_z = \dfrac{\partial V_x}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial x}$ – вертикальная компонента $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ при $z = h$.

Неизвестные функции находятся посредством решения системы уравнений

$$\hat{L}V = 0,\; \hat{L}U = -\Omega\frac{z}{h}V,\; \hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия

при $z = 0$: $U = 0$, $V = A\sin\omega t$.

при $z = h$: $\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Решение краевой задачи

$$V_y = \frac{A}{2\left[\cosh(2kh) + \cos(2kh)\right]}$$

$$\left[\exp(-kz)\sin(2kh)\cos(\omega t - kz) + \right.$$

$$+\left[\exp(-k(z-2h)) + \exp(-kz)\cos(2kh)\right]\sin(\omega t - kz) +$$

$$-\exp(kz)\sin(2kh)\cos(kz + \omega t) +$$

$$\left. +\left[\exp(k(z-2h)) + \exp(kz)\cos(2kh)\right]\sin(kz + \omega t)\right].$$

Решение краевой задачи

$$V_x = \frac{A\Omega}{4\omega}\exp(kz)\cos(kz+\omega t)\times$$

$$\times\left[\frac{kh}{2}+\frac{1}{4kh}+\frac{-kz^2\left(1+\exp(2kh)\cos(2kh)+\sin(2kh)\right)+z\left(1+\exp(2kh)\cos(2kh)\right)}{h\left[1+2\exp(2kh)\cos(2kh)+\exp(4kh)\right]}\right]+$$

$$+\frac{A\Omega}{4\omega}\exp(kz)\sin(kz+\omega t)\left[\frac{1}{4hk}-\frac{hk}{2}+\frac{kz^2\left(1+\exp(2kh)\cos(2kh)-\sin(2kh)\right)+z\sin(2kh)}{h\left[1+2\exp(2kh)\cos(2kh)+\exp(4kh)\right]}\right]+$$

$$+\frac{A\Omega}{4\omega}\exp(-kz)\cos(kz-\omega t)\times$$

$$\times\left[-\frac{hk}{2}-\frac{1}{4kh}+\exp(2kh)\frac{kz^2\left(\exp(2kh)+\cos(2kh)-\sin(2kh)\right)+z\left(\exp(2kh)+\cos(2kh)\right)}{h\left[1+2\exp(2kh)\cos(2kh)+\exp(4kh)\right]}\right]+$$

$$+\frac{A\Omega}{4\omega}\exp(-kz)\sin(kz-\omega t)\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{4hk}+\frac{hk}{2}+\exp(2kh)\frac{kz^2\left(\exp(2kh)+\cos(2kh)+\sin(2kh)\right)+z\sin(2kh)}{h\left[1+2\exp(2kh)\cos(2kh)+\exp(4kh)\right]}\right].$$

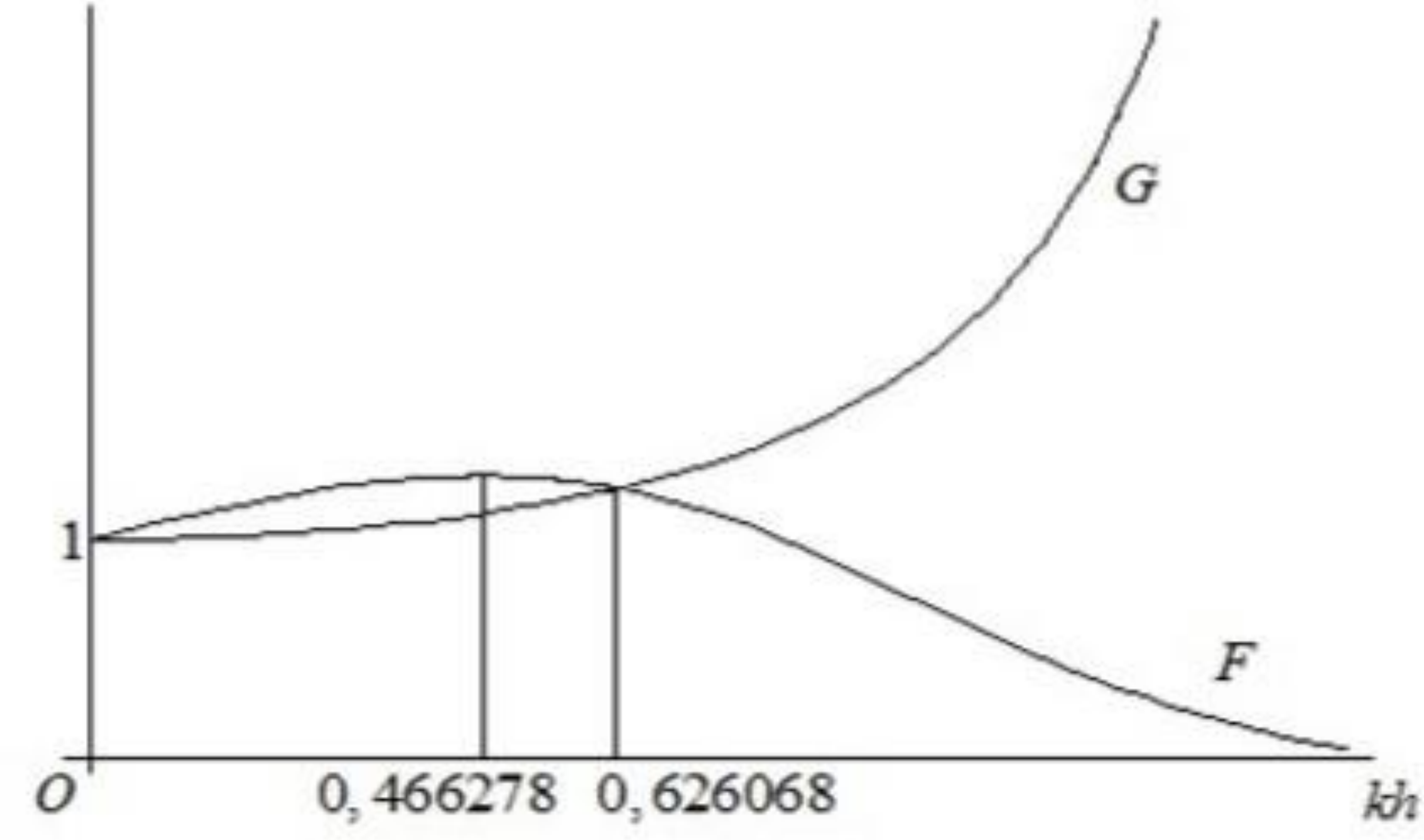


График скорости, параллельной оси *OY*

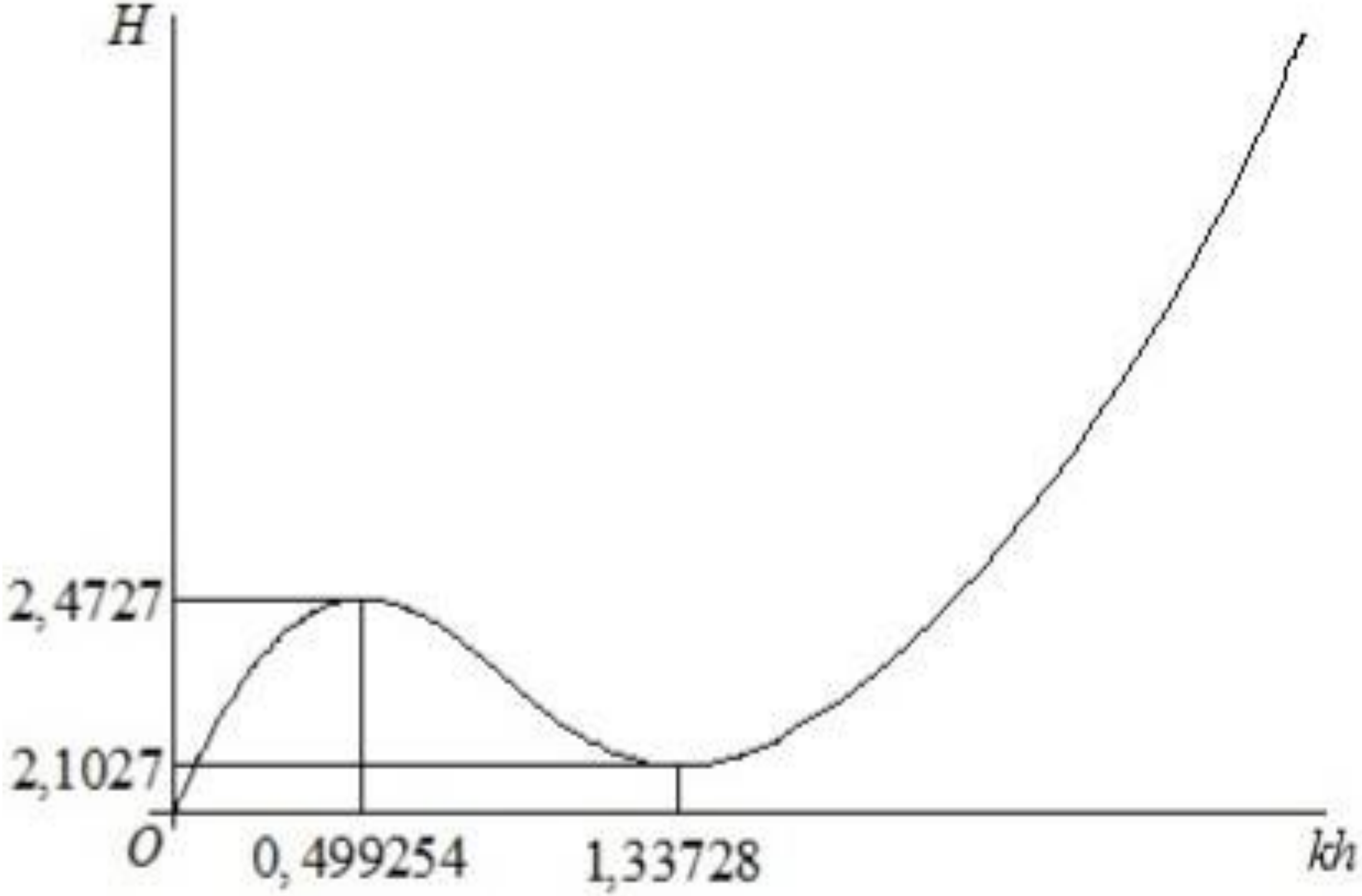


График огибающей скорости, параллельной оси *OX*

Обобщение решения Бириха и Остроумова

$$V_x = U\ ,\ V_y = V\ ,$$

$$P = P_0 + xP_1 + yP_2,\ \ T = T_0 + xT_1 + yT_2\,.$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2},\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1,\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -P_1 + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\ \frac{\partial V}{\partial t} = -P_2 + \nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + UT_1 + VT_2 = \chi\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2},\ \ \frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0$$

Конвективное движение Куэтта вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости

Для решения системы уравнений гидродинамические поля представим следующим образом:

$$V_x(y,z) = U(z) + yu(z),\; V_y = V(z),$$

$$P(x,y,z) = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z),$$

$$T(x,y,z) = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z).$$

Для нахождения неизвестных функций, описывающие гидродинамические поля, следует найти точное решение системы

$$\frac{d^2T_1}{dz^2}=0,\ \frac{d^2u}{dz^2}=0,\frac{dP_1}{dz}=g\beta T_1,\ \chi\frac{d^2T_2}{dz^2}=uT_1,\ \frac{dP_2}{dz}=g\beta T_2.$$

$$\nu\frac{d^2V}{dz^2}=P_2,\ \nu\frac{d^2U}{dz^2}=Vu+P_1,\ \chi\frac{d^2T_0}{dz^2}=UT_1+VT_2,\ \frac{dP_0}{dz}=g\beta T_0.$$

Точное диссипативное решение

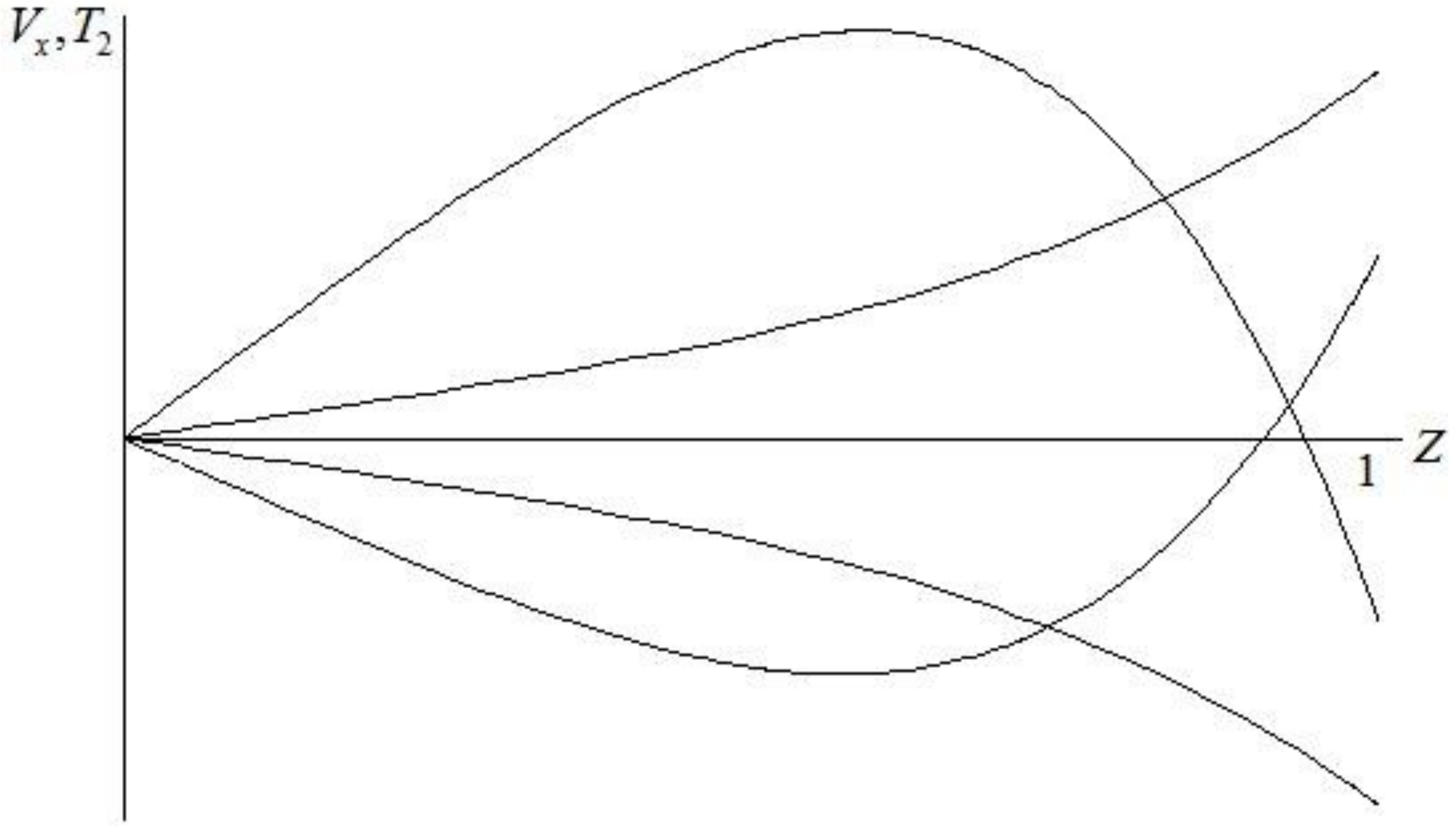
$$V = W\sin\varphi\frac{z}{h} + \frac{g\beta Bh^3}{4\nu}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{z}{h}\right)^4 - \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{z}{h}\right)\right] +$$

$$\frac{g\beta\Omega Ah^5}{8\chi\nu}\left[\frac{1}{315}\left(\frac{z}{h}\right)^7 - \frac{1}{36}\left(\frac{z}{h}\right)^4 + \frac{1}{10}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{19}{252}\left(\frac{z}{h}\right)\right],$$

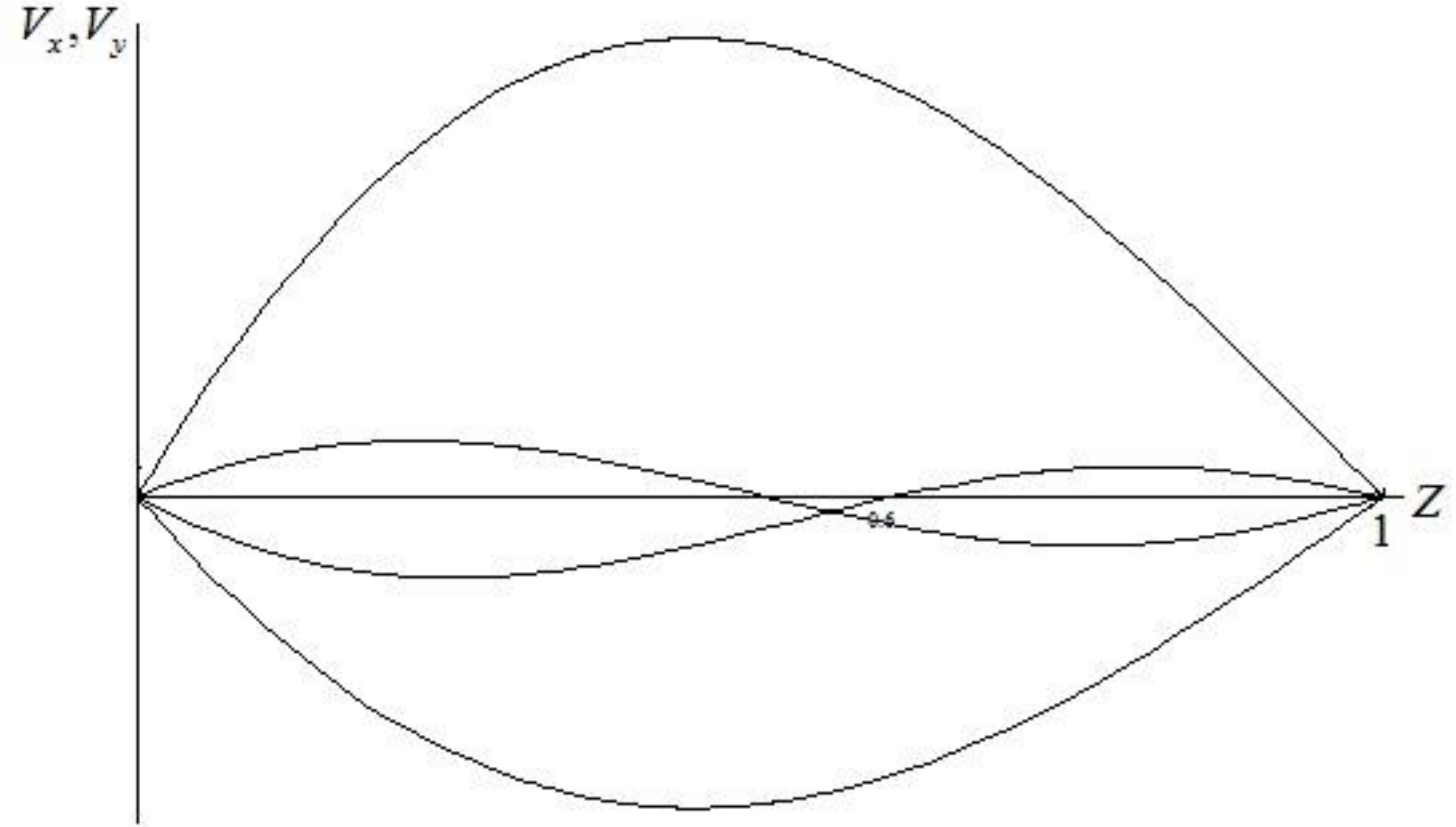
$$U = W\cos\varphi\frac{z}{h} + \frac{g\beta Ah^3}{4\nu}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{z}{h}\right)^4 - \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{z}{h}\right)\right] + \frac{W\sin\varphi\Omega h^2}{12}\left[\left(\frac{z}{h}\right)^4 - \frac{z}{h}\right] +$$

$$\frac{g\beta A\Omega^2h^7}{16\nu^2\chi}\left[\frac{1}{14175}\left(\frac{z}{h}\right)^{10} - \frac{1}{756}\left(\frac{z}{h}\right)^7 + \frac{1}{100}\left(\frac{z}{h}\right)^5 - \frac{19}{1512}\left(\frac{z}{h}\right)^4 + \frac{433}{113400}\left(\frac{z}{h}\right)\right] +$$

$$\frac{g\beta B\Omega h^5}{16\nu^2}\left[\frac{1}{63}\left(\frac{z}{h}\right)^7 - \frac{1}{5}\left(\frac{z}{h}\right)^5 + \frac{5}{18}\left(\frac{z}{h}\right)^4 - \frac{433}{113400}\left(\frac{z}{h}\right)\right]$$



V_x, T_2
Z
1



V_x, V_y
Z
1
0.5

Динамические равновесия жидкости

Гидродинамические и температурные поля будем вычислять в следующем виде:

$$V_x = U + xu_1 + yu_2,\ V_y = V + xv_1 + yv_2,$$

$$P = P_0 + xP_1 + yP_2 + \frac{x^2}{2}P_{11} + \frac{y^2}{2}P_{22} + xyP_{12},$$

$$T = T_0 + xT_1 + yT_2 + \frac{x^2}{2}T_{11} + \frac{y^2}{2}T_{22} + xyT_{12}.$$

Далее будут использоваться следующие дифференциальные параболические операторы в частных производных:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \hat{M} = \frac{\partial}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Система уравнений записывается в виде

$$\widehat{L}U + Uu_1 + Vu_2 + P_1 = 0,\ \widehat{L}u_1 + u_1^2 + v_1u_2 + P_{11} = 0,$$

$$\widehat{L}u_2 + u_2u_1 + v_2u_2 + P_{12} = 0,\ \widehat{L}V + Uv_1 + Vv_2 + P_2 = 0,$$

$$\widehat{L}v_1 + v_1u_1 + v_1v_2 + P_{12} = 0,\ \widehat{L}v_2 + u_2v_1 + v_2^2 + P_{22} = 0,$$

$$\widehat{M}T_0 + UT_1 + VT_2 - \chi\left(T_{11} + T_{22}\right) = 0,$$

$$\widehat{M}T_1 + UT_{11} + VT_{12} + u_1T_1 + v_1T_2 = 0,$$

$$\widehat{M}T_2 + UT_{12} + VT_{22} + u_2T_1 + v_2T_2 = 0,\ \ \widehat{M}T_{11} + 2u_1T_{11} + 2v_1T_{12} = 0,$$

$$\widehat{M}T_{22} + 2u_2T_{12} + 2v_2T_{22} = 0,\ \widehat{M}T_{12} + u_1T_{12} + u_2T_{11} + v_1T_{22} + v_2T_{12} = 0,$$

$$u_1 + v_2 = 0,\ \frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0,\ \frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1,\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2,$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial z} = g\beta T_{11},\ \frac{\partial P_{12}}{\partial z} = g\beta T_{12},\ \frac{\partial P_{22}}{\partial z} = g\beta T_{22}.$$

Рассмотрим следующее решение, описывающее вращающуюся жидкость

$$u_1 = 0,\; v_2 = 0,\; u_2 = -v_1,\; u_2 = \frac{\Omega z}{h},\; v_1 = \frac{-\Omega z}{h},$$

$$P_{12} = 0,\; P_{11} = P_{22} = -u_2 v_1 = \Omega^2 \frac{z^2}{h^2},$$

$$T_{12} = 0,\; g\beta T_{11} = g\beta T_{11} = \frac{2\Omega^2 z}{h^2}.$$

Остальные функции определяются из системы уравнений

$$\widehat{L}U + \frac{\Omega z}{h}V + P_1 = 0,\ \widehat{L}V - \frac{\Omega z}{h}U + P_2 = 0,$$

$$\widehat{M}T_1 + \frac{2\Omega^2 z}{g\beta h^2}U - \frac{\Omega z}{h}T_2 = 0,\ \widehat{M}T_2 + \frac{2\Omega^2 z}{g\beta h^2}V + \frac{\Omega z}{h}T_1 = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1,\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2;$$

$$\widehat{M}T_0 + UT_1 + VT_2 = \frac{4\chi\Omega^2 z}{g\beta h^2},\ \frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0.$$

Введем следующие комплексные функции:

$$W = U + iV\,,\;\; S = P_1 + iP_2,\, \Theta = g\beta\left(T_1 + iT_2\right).$$

Совершим преобразование вида:

$$S = S_1 + i\Omega z W\,,\; \Theta = \Theta_1 + 2i\Omega W$$

Получим систему уравнений

$$\nu\frac{d^2W}{dz^2} + S_1 = 0,\; \chi\frac{d^2\Theta_1}{dz^2} + i\Omega z\Theta_1 - 2i\Omega\frac{\chi}{\nu}S_1 = 0\,,$$

$$\frac{dS_1}{dz} - \Theta_1 + i\Omega z^2\frac{d}{dz}\left(\frac{W}{z}\right) = 0.$$

Для дальнейших преобразований используем дифференциальное тождество

$$\frac{d^2W}{dz^2} \equiv \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}\left(\frac{W}{z}\right)\right).$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

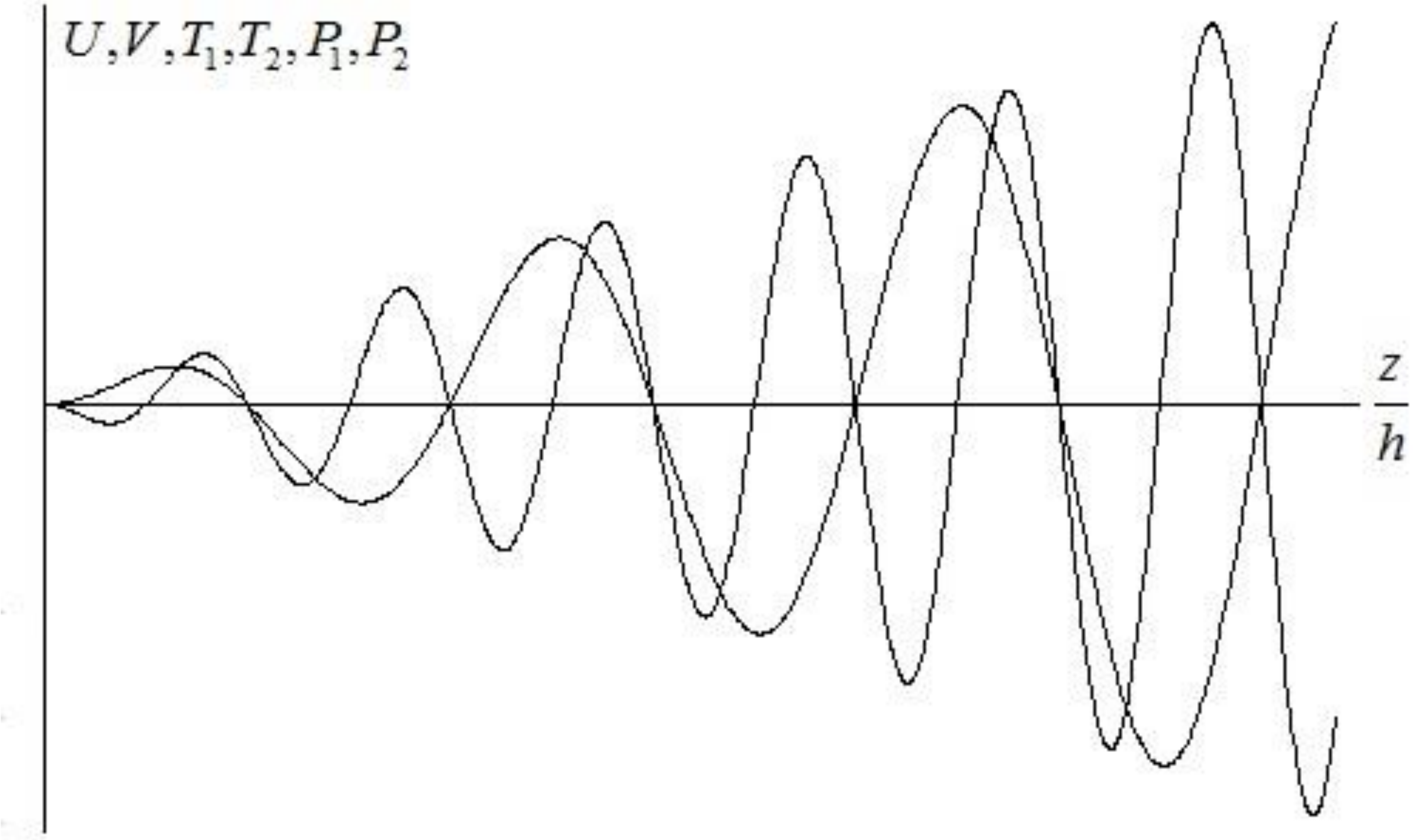
$$\left[\nu\chi\frac{d^4}{dz^4} + i\Omega(\nu-\chi)\frac{d^2}{dz^2}z + \Omega^2 z^2\right]\Theta_1 = 0.$$

Точное решение

$$\Theta_1 = \mathrm{Ai}\left(\xi + \frac{4\sqrt{\nu\chi}\Omega z}{\nu\chi\sqrt[3]{\dfrac{16\Omega^2}{\nu^2\chi^2}}}\right)\left(C_1\mathrm{Ai}(\xi) + C_2\mathrm{Bi}(\xi)\right) +$$

$$\mathrm{Bi}\left(\xi + \frac{4\sqrt{\nu\chi}\Omega z}{\nu\chi\sqrt[3]{\dfrac{16\Omega^2}{\nu^2\chi^2}}}\right)\left(C_3\mathrm{Ai}(\xi) + C_4\mathrm{Bi}(\xi)\right)$$

Здесь $\xi = \dfrac{i\nu - i\chi + 2\sqrt{\nu\chi}\Omega z}{\nu\chi\sqrt[3]{\dfrac{16\Omega^2}{\nu^2\chi^2}}}$


U, V, T_1, T_2, P_1, P_2
$\frac{z}{h}$

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!

evgen_pros@mail.ru
+79826545223