



ВНИИА
РОСАТОМ

Подсеточное восполнение разрывных решений с использованием алгоритмов машинного обучения

Серёжкин А.А. Дьячков С.А. Муратов Р.В.

Забабахинские Научные Чтения 2023

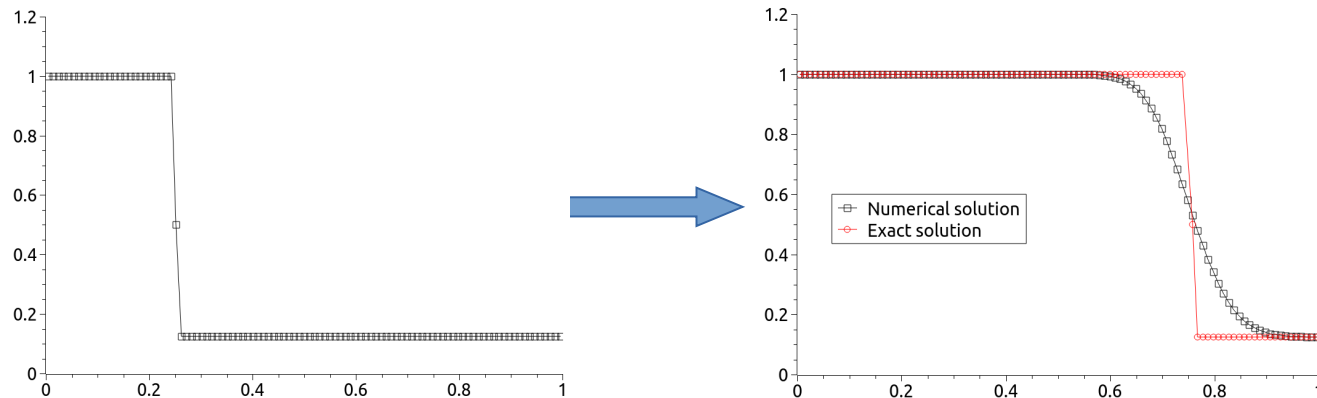
Снежинск
29 мая – 2 июня 2023

Постановка задачи

Построение методики подсеточного восполнения для повышения аппроксимации численных методов решения систем дифференциальных уравнений гиперболического типа на разрывных решениях.

На примере численного метода конечного объема для решения системы уравнений гидродинамики на Эйлеровых сетках.

Моделирование переноса разрыва на Эйлеровой сетке:



Система уравнений и численный метод

Система уравнений гидродинамического течения сплошной среды:

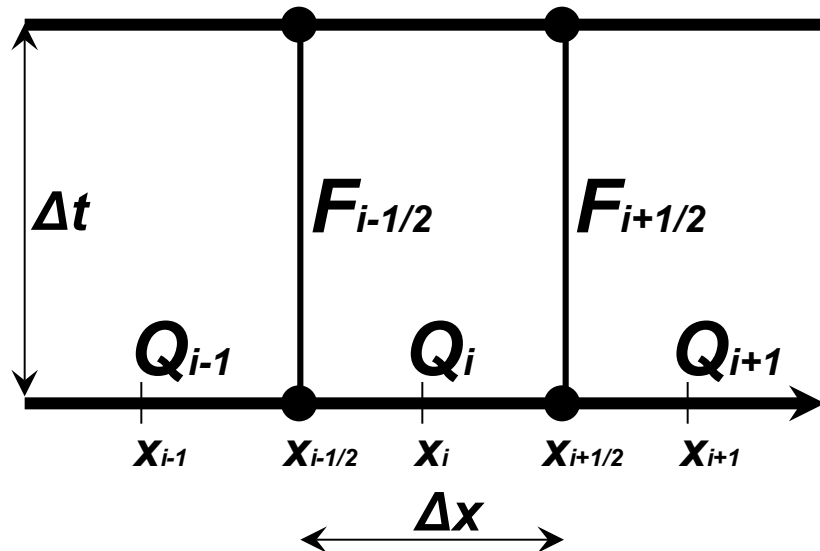
$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E + P u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= e(\rho, P) + \frac{u^2}{2} \\ e(\rho, P) &= \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Метод конечного объема:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1/2} - F_{i+1/2})$$



Точность расчета численного потока определяется точностью решения задачи Коши в области грани между ячейками. Начальные данные для задачи Коши определяются методикой подсеточного восполнения.

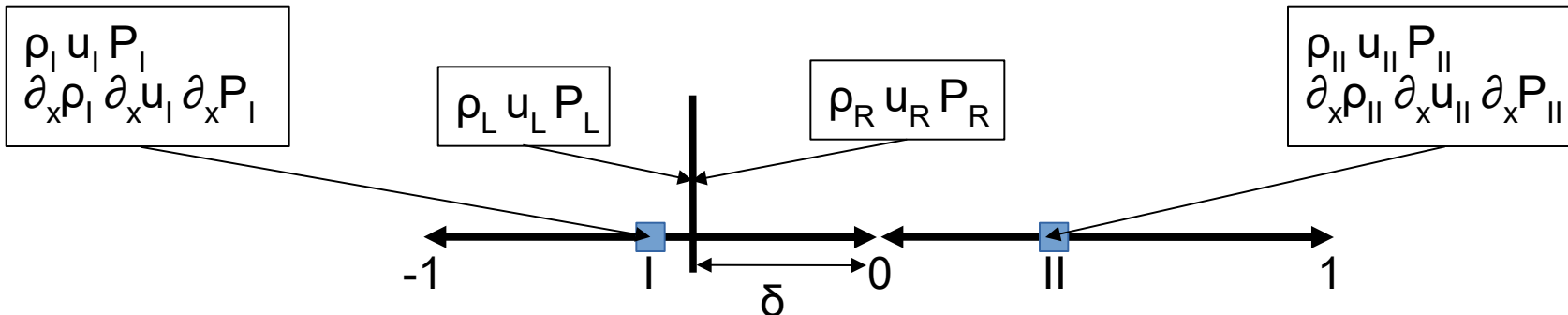
Для разрывных решений будет использоваться специальная методика восполнения. Тип решения (разрывное или непрерывное) определяется с помощью нейросети.

Постановка задачи для нейросетевого анализа

Определение методики подсеточного восполнения в зависимости от типа течения в области границы между ячейками.

- Три типа течения — контактный разрыв, ударная волна и гладкое изэнтропическое течение.
- Тип течения определяется на основе локальных данных — значения и нелимитированные производные параметров течения в ячейках.
- Задача для нейросетевого анализа — по произвольно заданным локальным данным определить к какому типу относится течение в области контакта ячеек.

Определение обучающей и тестовой выборки



● Контактный разрыв

$$\begin{aligned} \rho_L &\leftarrow (\rho_{\min}; \rho_{\max}) \\ u_L &\leftarrow (u_{\min}; u_{\max}) \\ P_L &\leftarrow (P_{\min}; P_{\max}) \\ \rho_R &\leftarrow (\rho_{\min}; \rho_{\max}) \\ \delta &\leftarrow (-1; 0) \\ u_L &= u_R \\ P_L &= P_R \end{aligned}$$

● Ударная волна

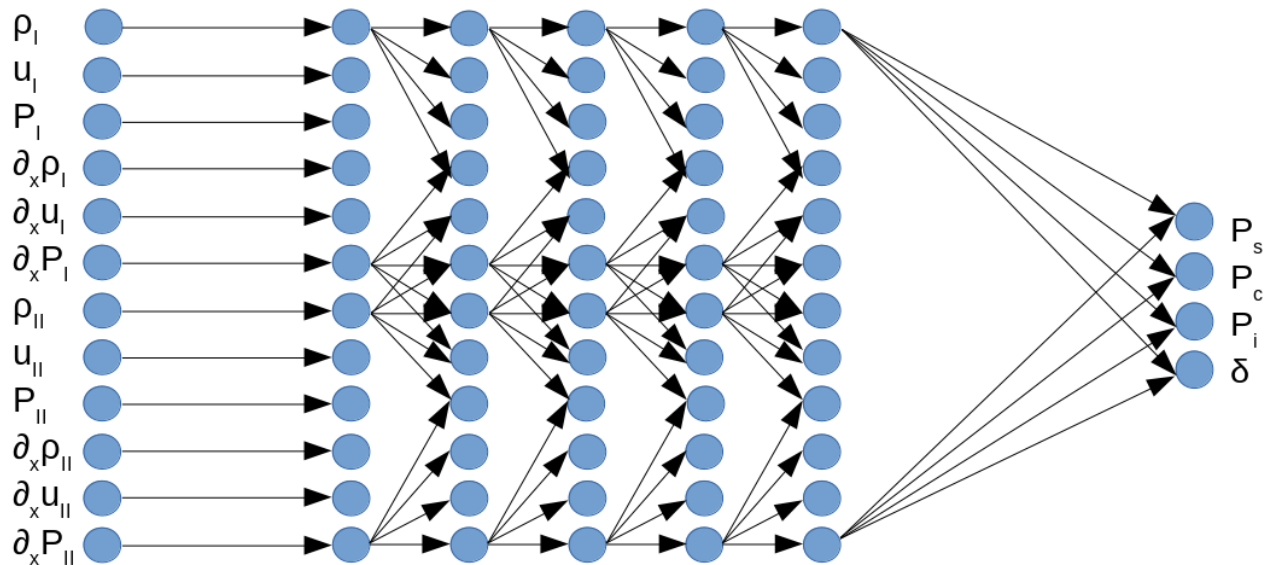
$$\begin{aligned} \rho_L &\leftarrow (\rho_{\min}; \rho_{\max}) \\ u_L &\leftarrow (u_{\min}; u_{\max}) \\ P_L &\leftarrow (P_{\min}; P_{\max}) \\ \rho_R &\leftarrow (\rho_{\min}; \rho_{\max}) \\ \delta &\leftarrow (-1; 0) \\ u_R, \rho_R &\text{ - рассчитываются} \\ &\text{с помощью уравнения адиабаты} \end{aligned}$$

● Изэнтропическое течение

$$\begin{aligned} \rho_I &\leftarrow (\rho_{\min}; \rho_{\max}) \\ u_I &\leftarrow (u_{\min}; u_{\max}) \\ P_I &\leftarrow (P_{\min}; P_{\max}) \\ u_{II} &\leftarrow (u_{\min}; u_{\max}) \\ P_{II} &\leftarrow (P_{\min}; P_{\max}) \\ \rho_{II} &\text{ - рассчитываются} \\ &\text{с помощью уравнения} \\ &\text{изэнтропы} \end{aligned}$$

Используя ρ_L, u_L, P_L и ρ_R, u_R, P_R рассчитываются $\rho_I, u_I, P_I, \partial_x \rho_I, \partial_x u_I, \partial_x P_I$ и $\rho_{II}, u_{II}, P_{II}, \partial_x \rho_{II}, \partial_x u_{II}, \partial_x P_{II}$

Архитектура нейросети



Функция активации - гиперболический тангенс (\tanh).

Выборка ~ 100000 точек на каждый тип течения разбивается на:

$\sim 80\%$ - обучающая часть

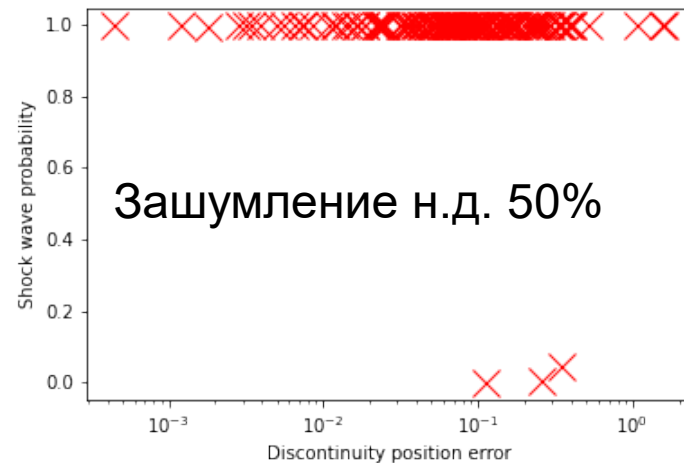
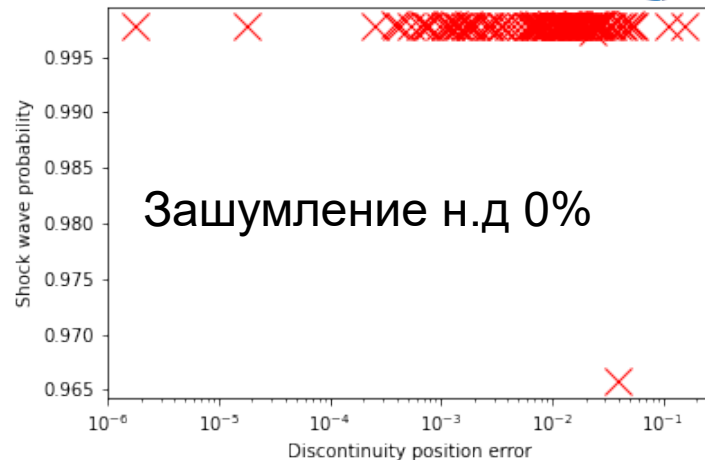
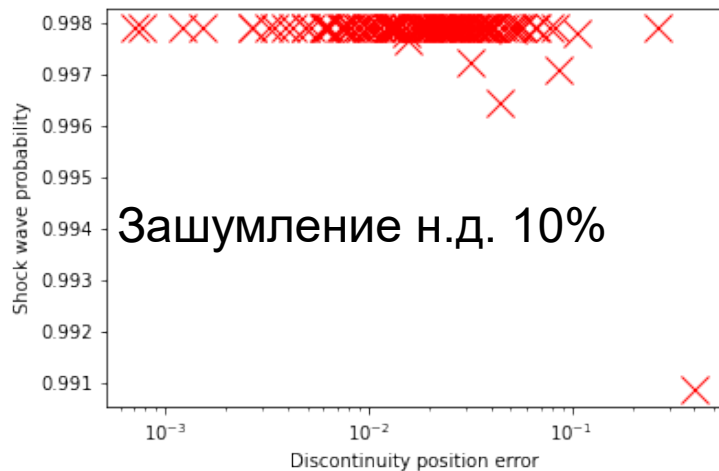
$\sim 20\%$ - валидационная часть

1000 тестовых точек

Тестирование нейросети

Ударноволновое течение

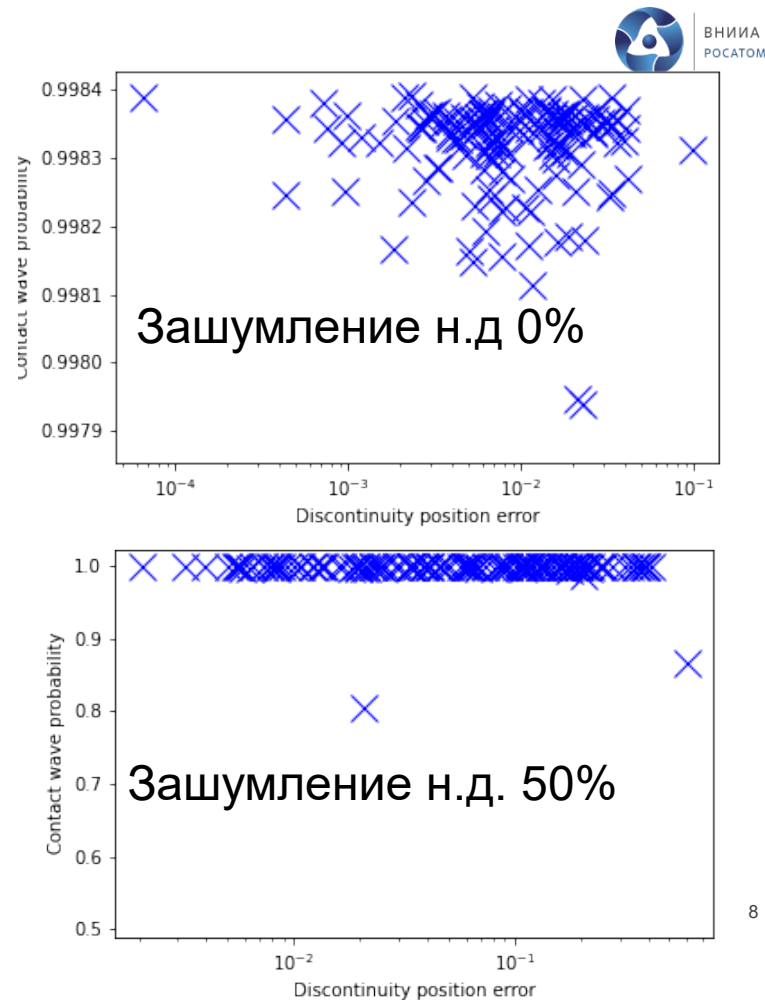
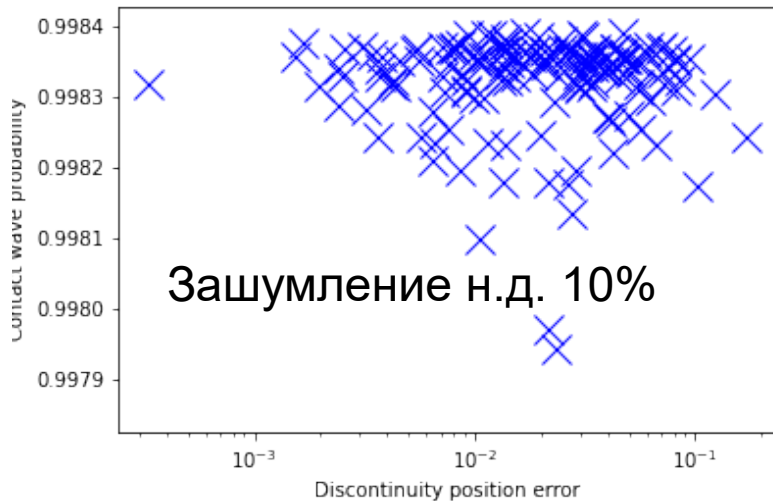
- Результаты нейросетевого анализа для точек, соответствующих течению типа Ударная волна.
- Вероятность течения УВ vs ошибка определения положения разрыва



Тестирование нейросети

Перенос контактного разрыва

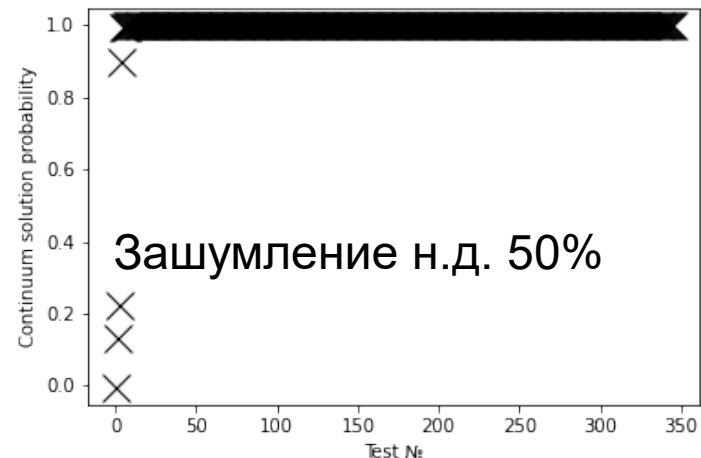
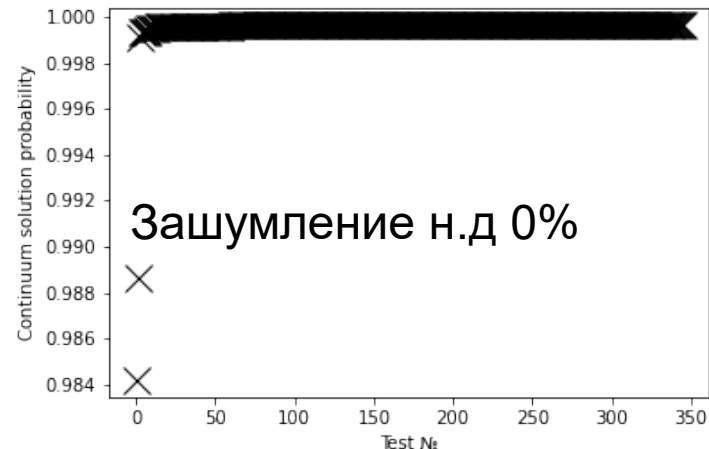
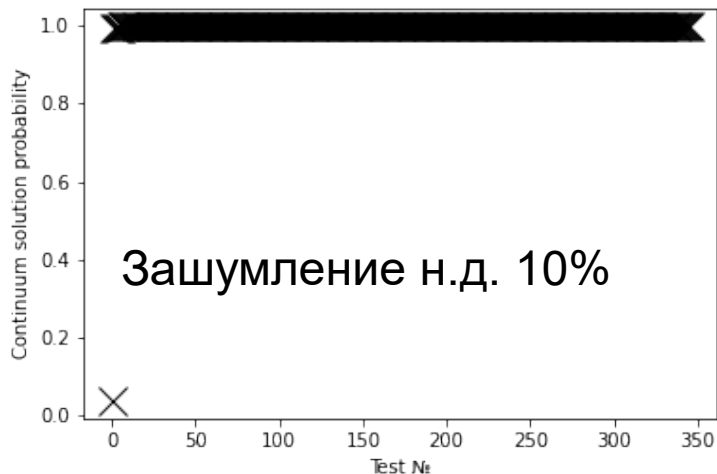
- Результаты нейросетевого анализа для точек, соответствующих течению типа Контактный разрыв.
- Вероятность течения перенос КР vs ошибка определения положения разрыва



Тестирование нейросети

Гладкие течения

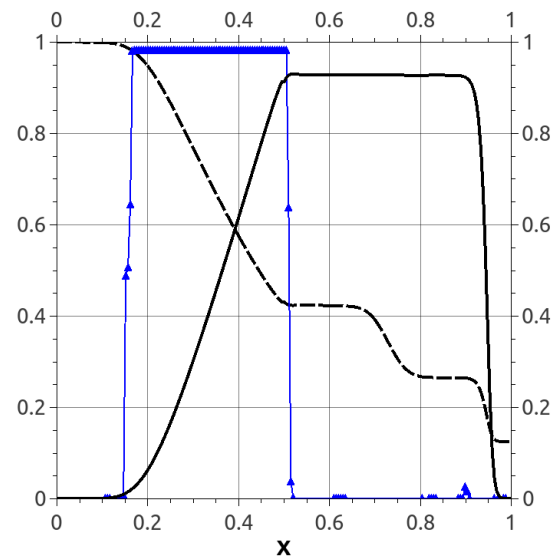
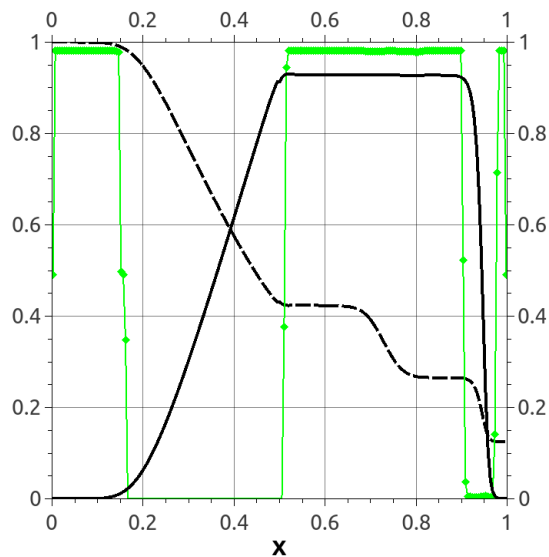
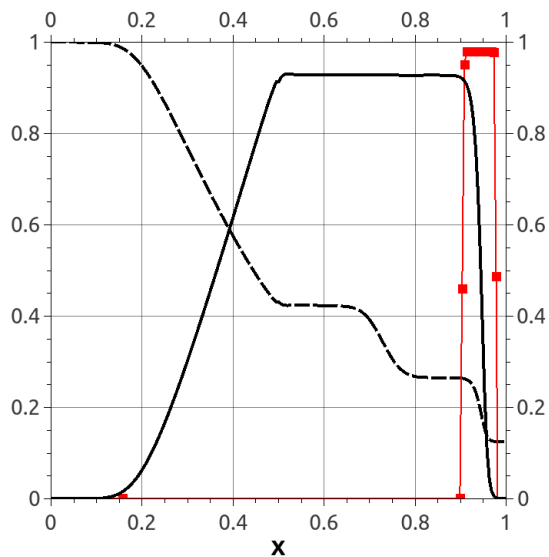
- Результаты нейросетевого анализа для точек, соответствующих гладкому изэнтропическому течению.
- Вероятность изэнтропического течения vs номер теста



Тестирование нейросети

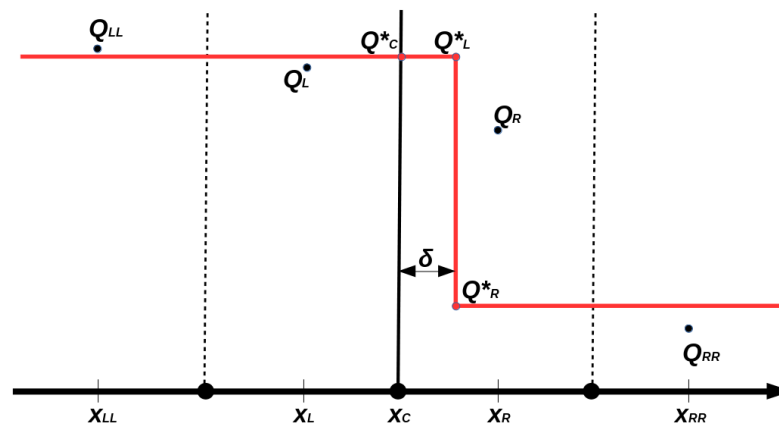
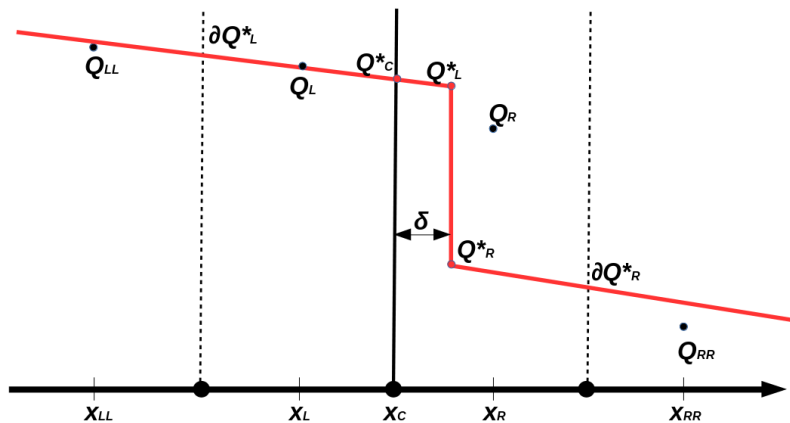
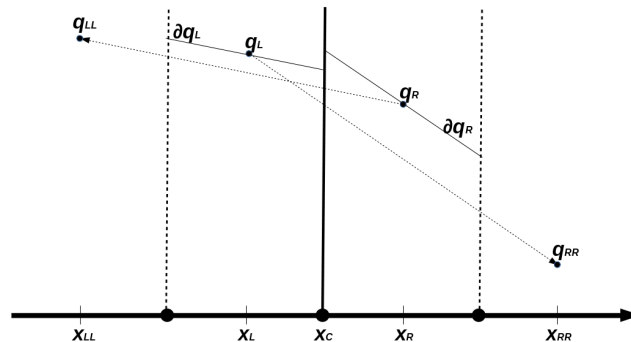
Задача о распаде разрыва

- Результаты нейросетевого анализа численного решения задачи о распаде разрыва, посчитанной методом конечного объема с первым порядком точности.
- Красный маркер — УВ течение, Зеленый маркер — КР течение, Синий маркер — изэнтропическое течение.



Схемы выполнения разрывного решения

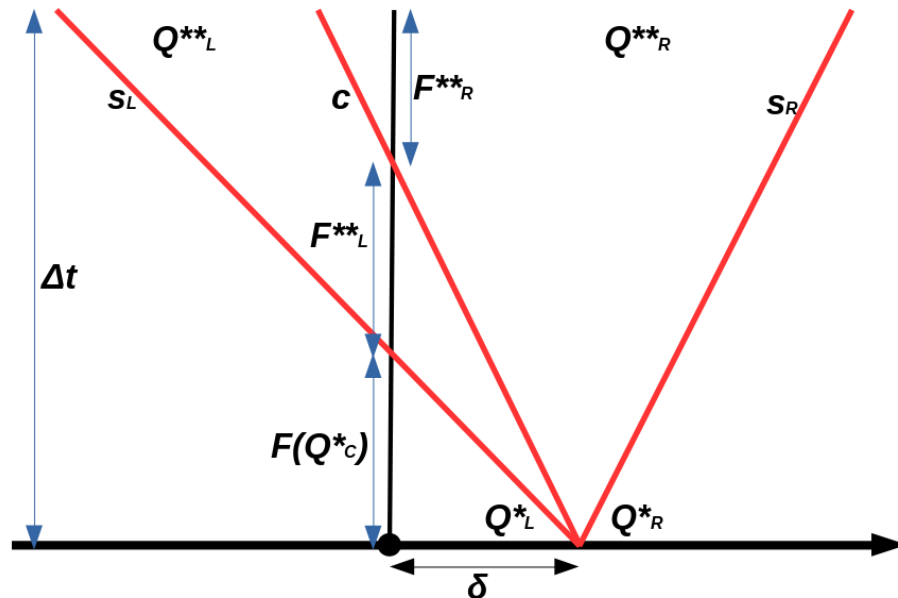
Кусочно-постоянное и кусочно-линейное выполнение строится минимизацией отклонения от среднего значения в ячейке и значения в опорных точках



Расчет численного потока

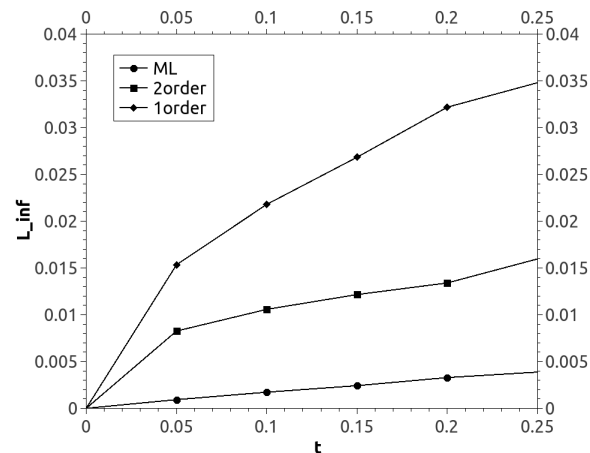
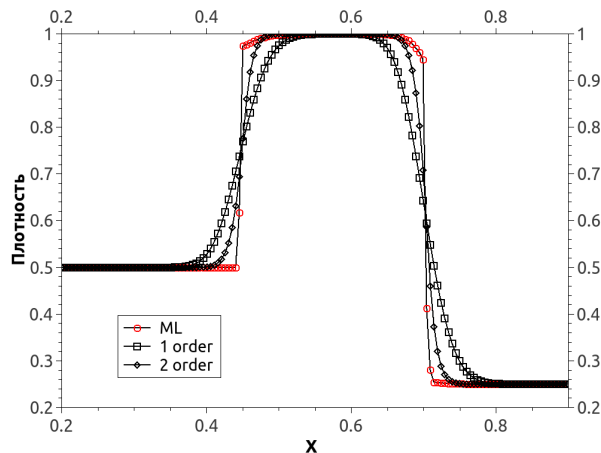
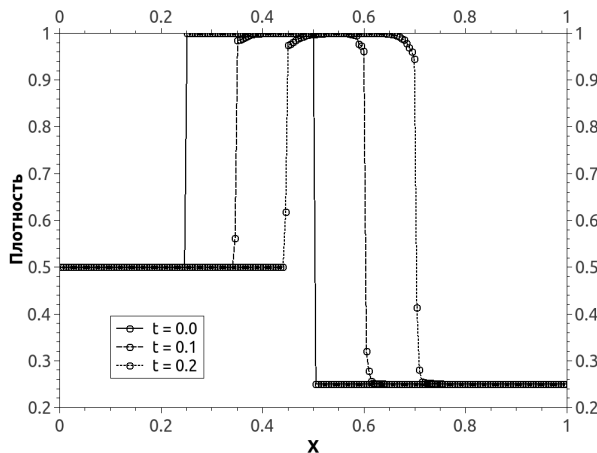
Схема расчета численного потока на границе ячеек для случая разрывного восполнения решения.

Аппроксимация распада разрыва по методике HLLC.



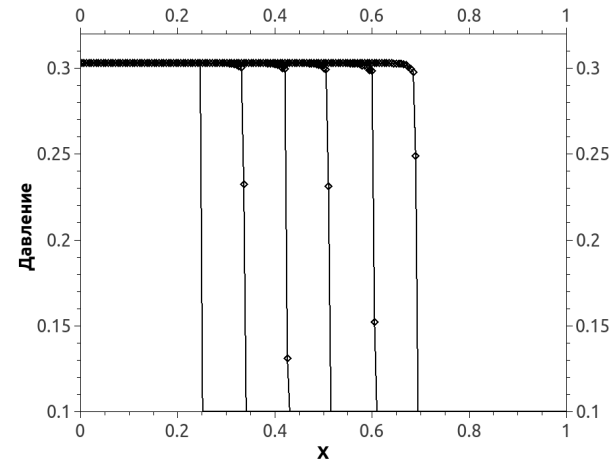
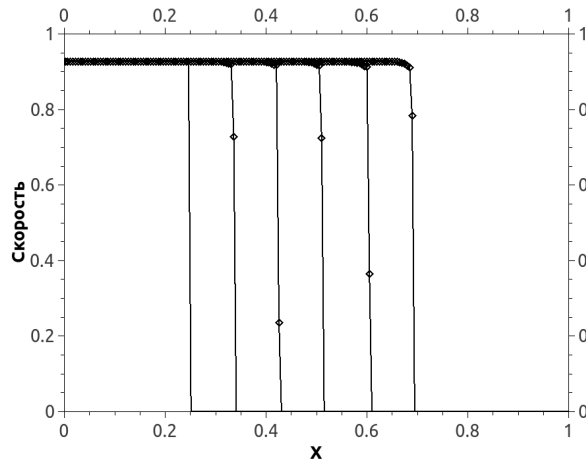
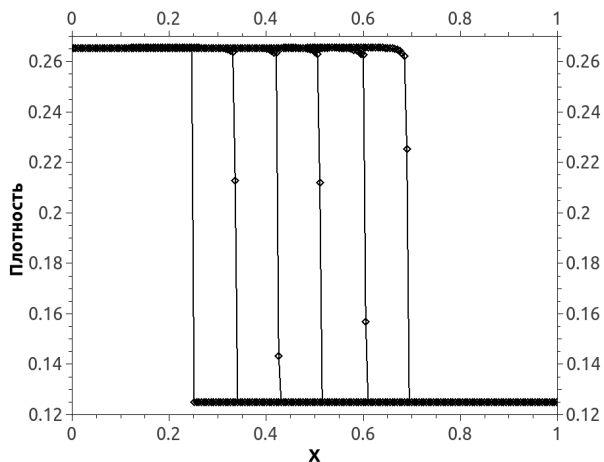
Численное решение задачи переноса

Моделирование переноса кусочно-постоянного профиля плотности с постоянной скоростью.



Численное решение задачи распространения ударной волны

Моделирование распространения ударной волны.



Численное решение задачи о распаде разрыва

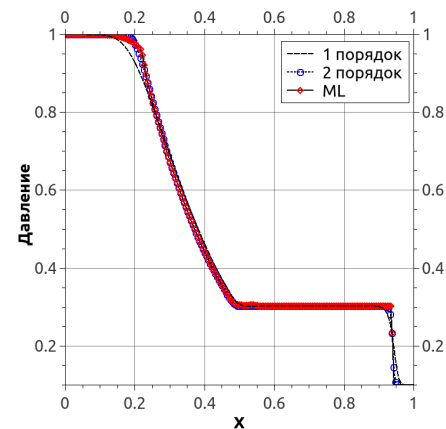
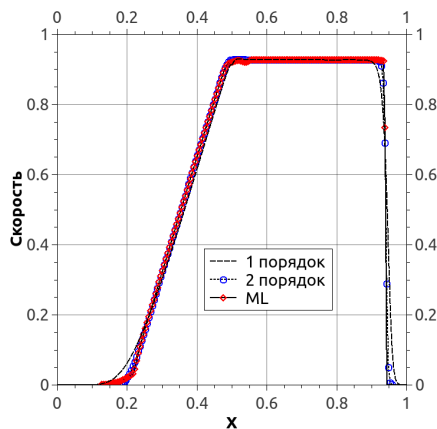
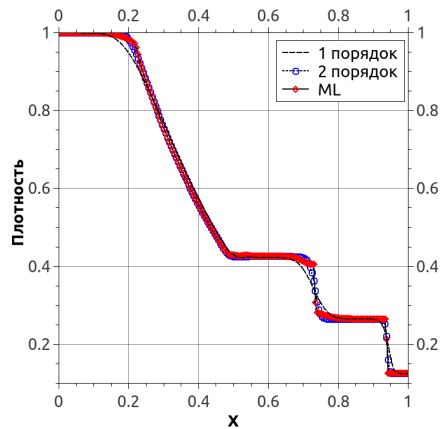
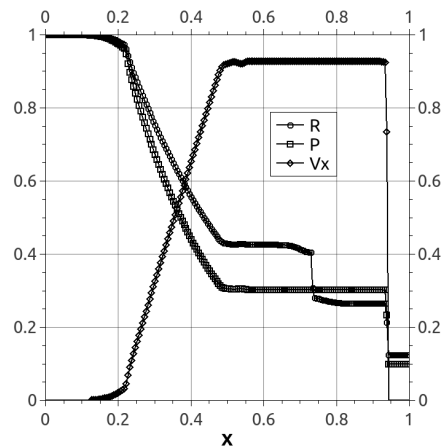
Моделирование задачи о распаде разрыва.

Расчетная сетка – 200 ячеек

$$\rho = 1, u = 0, P = 1, \text{ если } x < 0.5$$

$$\rho = 0.125, u = 0, P = 0.1, \text{ если } x > 0.5$$

$$t_{\text{end}} = 0.25$$

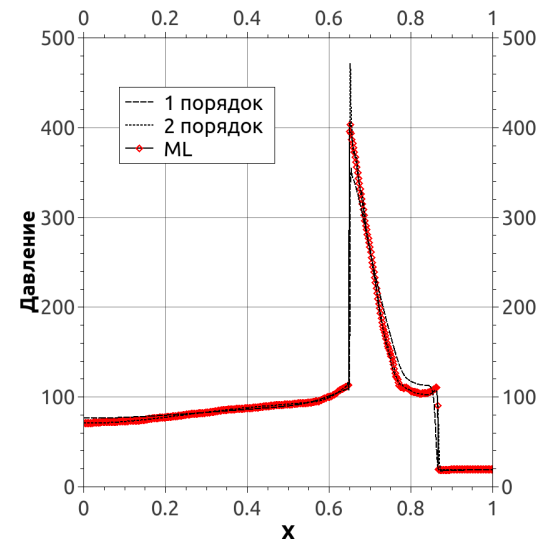
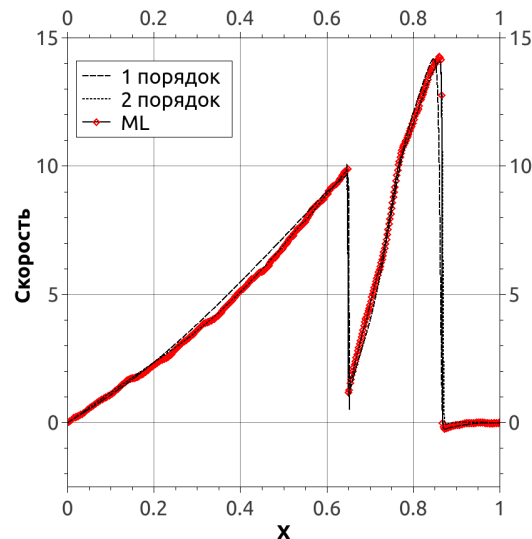
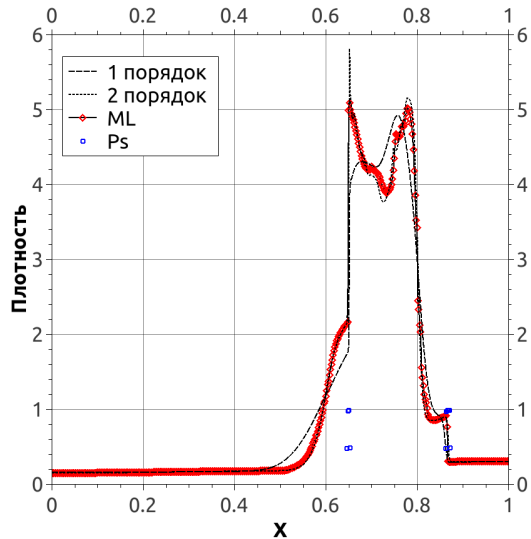


Численное решение задачи Вудворда-Коллелы

Моделирование задачи Вудворда-Коллелы взаимодействия сильных ударных волн.

Расчетная сетка – 400 ячеек

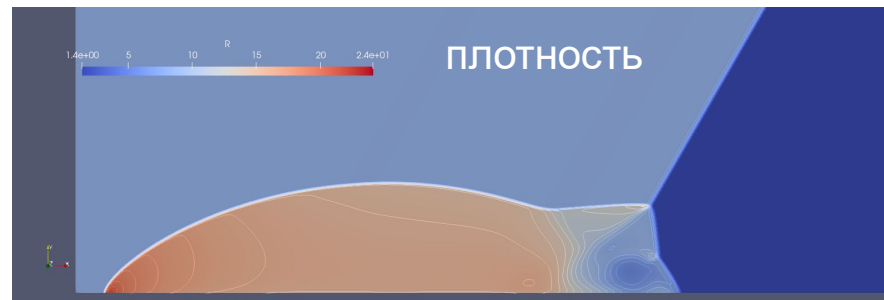
$$\begin{aligned} \rho &= 1.0, u = 0.0, P = 1000.0, \text{ если } x < 0.1 \\ \rho &= 1.0, u = 0.0, P = 0.01, \text{ если } 0.1 < x < 0.9 \\ \rho &= 1.0, u = 0.0, P = 100.0, \text{ если } x > 0.9 \end{aligned}$$



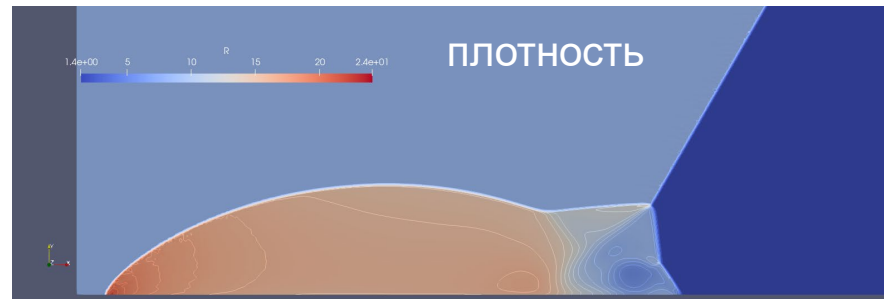
Численное решение задачи двумерного течения

Моделирование задачи отражения сильной ударной волны.

Моделирование без использования машинного обучения:



Моделирование с использованием машинного обучения:



Заключение

Для метода конечного объема решения системы уравнений модели гидродинамического течения построена методика подсеточного восполнения разрывных решений с целью повышения аппроксимации разрывных решений.

- Тип решения (непрерывный или разрывной) определяется на основе данных нейросетевого анализа, на основе которого выбирается методика восполнения.
- Методика позволяет проводить расчеты разрывных течений типа распространения УВ или движения КР с разрешением разрыва с точностью до одной ячейки.
- Методика не нарушает точность решения задач гладких изэнтропических течений

Перспективы дальнейшего исследования:

- Применение аналогичной методики для случая произвольного уравнения состояния
- Расширение методики для альтернативных систем уравнений

Спасибо за внимание

Серёжкин Алексей Александрович
Дьячков Сергей Александрович
Муратов Родион Владимирович