



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Применение неоднородного шага по времени в методе Куропатенко при моделировании газодинамических процессов в эйлеровых координатах

29.05.2023

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. Академика Е.И. Забабахина»

Мастюк Д.А., Беляев П.Е., Макеева И.Р., Куприянец Т.А., Пигасов Е.Е.

Содержание

1. Введение

Актуальность, цели и задачи

2. Численный метод

Алгоритм синхронизации газодинамических потоков

3. Результаты расчётов

Представление результатов тестовых расчётов

4. Заключение

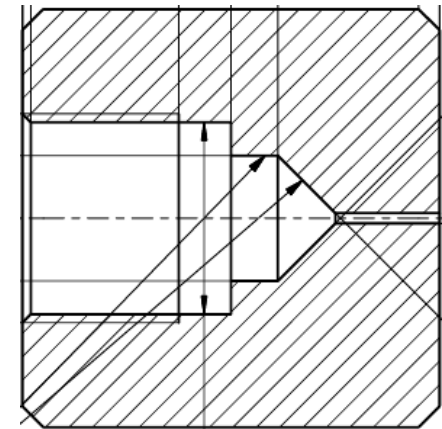
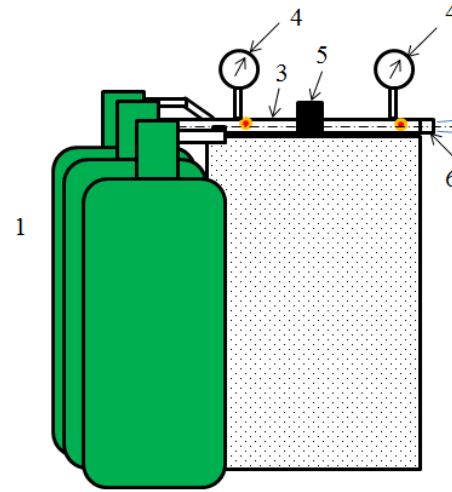
1

Введение

Введение

Шаг по времени при интегрировании системы газодинамических уравнений с использованием явных разностных методов определяется на основе условия Куранта. Временной шаг зависит от отношения размера сеточного элемента к интенсивности протекающего процесса. В связи с этим на него большое влияние оказывают:

- Разномасштабность элементов установки
- Разные характерные времена процессы
- Сложная геометрия

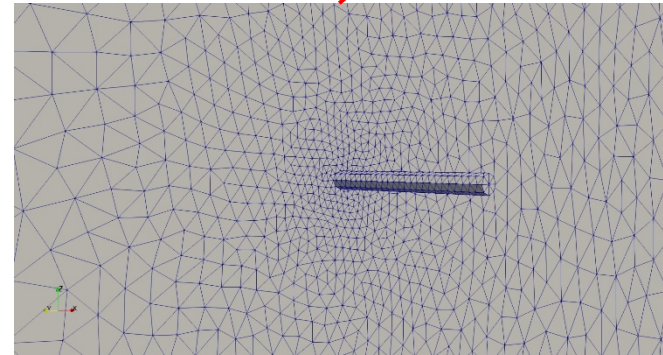
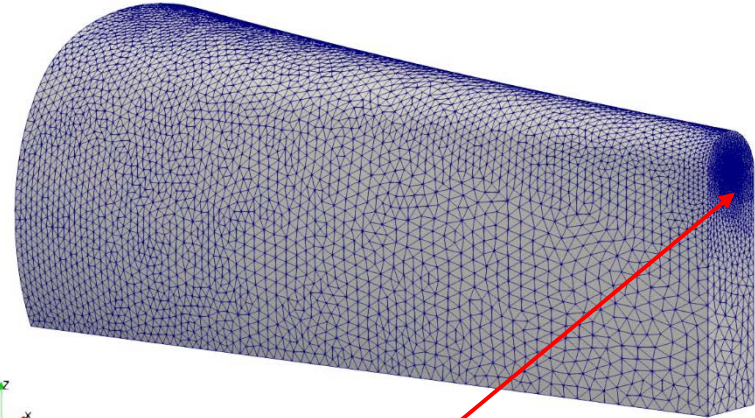


Моделирование установки струйного истечения

Геометрические размеры расчётной области: длина 10м, ширина 2м (максимальная), высота 2м (максимальная). Сопло имеет диаметр 1мм.

- Отношение между размерами максимального и минимального сеточных элементов достигает 2^8 .
- Максимальная скорость в области 1000 м/с. Средняя скорость 50 м/с.

В связи с чем возникает необходимость расчёта ячеек с различными временными шагами.



Цели и задачи

Разработка численного алгоритма синхронизации потоков для интегрирования системы уравнений механики сплошной среды с неоднородным шагом по времени:

- **Разработка алгоритма разбиения области;**
- **Организация расчёта смежных областей;**
- **Оптимизация и параллельный расчёт на вычислительных системах с общей памятью**

2.

Численный метод

Система уравнений законов сохранения в интегральной форме

Уравнение неразрывности:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \operatorname{div} \rho \vec{U} dV + \int_V S_M dV$$

Уравнение сохранения импульса:

$$\int \frac{\partial \rho U_l}{\partial t} dV = - \oint (P \delta_{lm} - \rho U_l U_m) df_m + \int_V \rho g_l dV + \int_V S_l^J dV$$

Уравнение сохранения энергии:

$$\int \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} dV = - \oint \rho \vec{U} \varepsilon d\vec{f} - \oint_{\partial V} \tau \bullet \vec{U} d\vec{f} + \oint_{\partial V} \chi \vec{\nabla} T d\vec{f} + \int_V \rho (\vec{g} \cdot \vec{U}) dV + \int_V S_\varepsilon dV$$

Уравнение состояния газа:

$$P = P(\rho, E)$$

Условие устойчивости:

$$Cu = dt \cdot \min \left(\frac{C + |U|}{dx} \right)$$

где

$$0 < Cu \leq 1$$

ρ – плотность,
 l, m – координатные компоненты вектора скорости U , пробегающие значения 1, 2, 3, соответствующие x, y, z ,
 \vec{U} – вектор скорости,
 P – давление,
 E – внутренняя энергия,
 S_M – источник массы смеси,
 S_{Jl} – источник l -го компонента импульса,

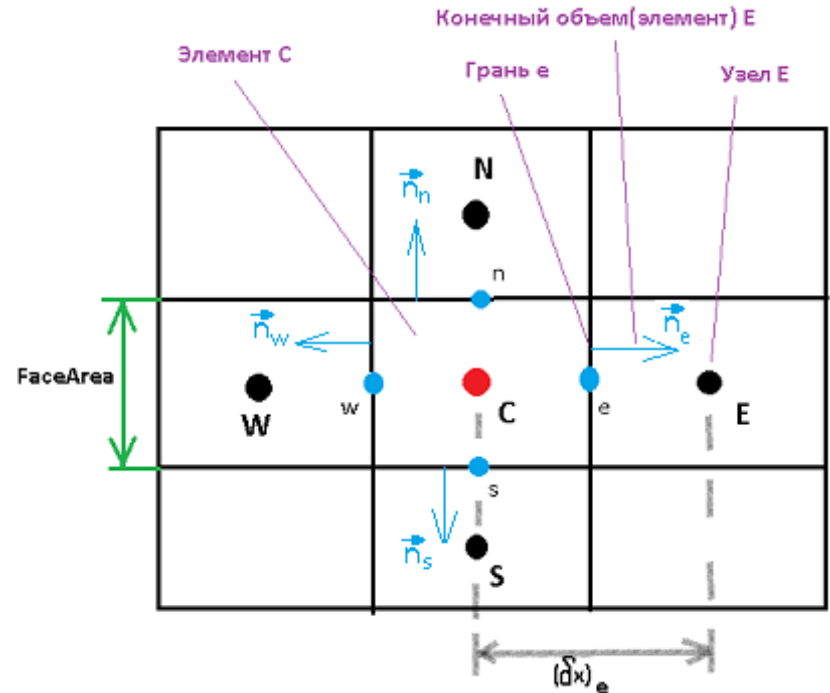
S_ε – источник энергии,
 V – объём,
 $d\vec{f}$ – ориентированная площадь,
 τ – тензор напряжений,
 χ – коэффициент теплопроводности,
 ε – полная энергия единицы массы.
 Cu – число куранта

Метод конечных объёмов

Метод конечных объёмов используется для преобразования системы уравнений в частных производных в систему линейных алгебраических уравнений.

Тем самым изменение величин внутри конечного объёма зависит от суммы потоков массы импульса энергии а также силового взаимодействия через грани.

Применение метода конечных объёмов позволяет производить расчёты с применением сеточных моделей состоящих из произвольных многогранников, что позволяет с высокой точностью описывать разномасштабную геометрию расчётных областей, с использованием минимального количества сеточных ячеек.



Алгоритм разбиения области

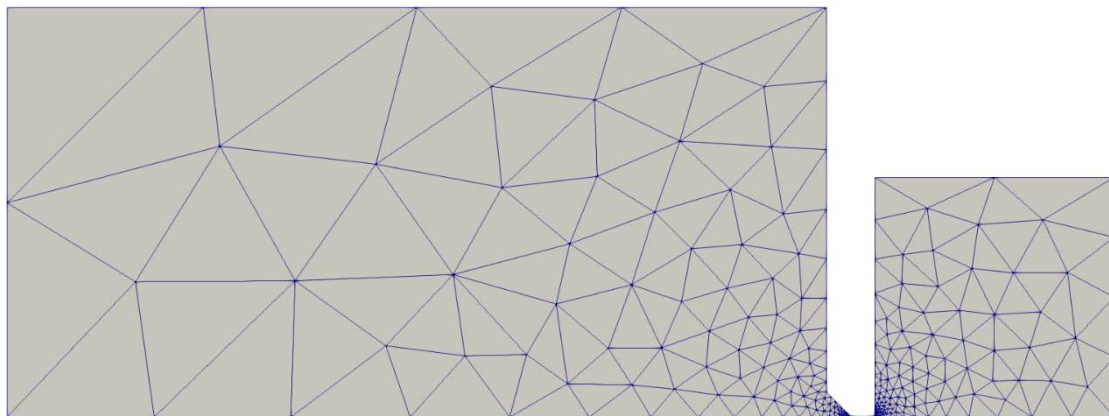
1. На этапе подготовки расчёта определяется условие устойчивости dt .

2. Далее происходит сортировка от наименьшего dt_{\min} условия устойчивости к наибольшему dt_{\max} .

3. Затем на основе наименьшего и наибольшего сеточного элемента грани разделяются на n групп где n удовлетворяет условию

$$dt_{\min} 2^{n-1} < dt_{\max} < dt_{\min} 2^n$$

и каждой грани присваивается её номер группы.

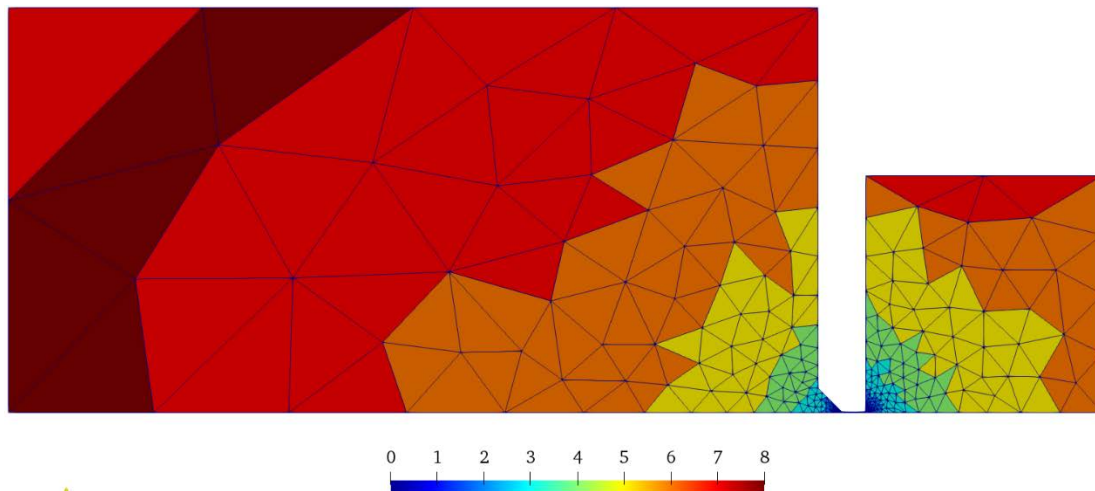


Алгоритм разбиения области

4. Далее определяются номера группы для каждой ячейки, как максимальный номер среди её граней

5. Затем происходит балансировка групп таким образом что номера соседних ячеек не могут отличаться более чем на 1, при этом, балансировка производится только вниз, что означает, что номер может только уменьшиться.

6. В завершении производится переопределение номеров групп граней, выбором минимального номера среди прилежащих ячеек.



Определение шага по времени.

1. Изначально определяется шаг по времени для каждой группы ячеек как

$$Dt_n = Cu \cdot \min\left(\frac{dx_i}{C_i + |U_i|}\right),$$

2. Затем выбирается минимальный шаг по времени для всей расчётной сетки как

$$dt_{min} = \min\left(\frac{dt_n}{2^n}\right),$$

причем нахождение шага по времени для расчётной сетки происходит на всех промежуточных шагах, а шага по времени для групп ячеек только на тех где происходит расчёт этих групп.

3. Затем производится суммирование временного шага для каждой группы ячеек.

$$dt_n = \sum_0^n dt_{min}.$$

Значения на гранях, метод Куропатенко

При ударно-волновом течении ($\vec{U}_O \cdot \vec{n}_F > \vec{U}_N \cdot \vec{n}_F$), значения на гранях определяются как

$$\begin{cases} U_F = \vec{U}_O \cdot \vec{n}_F, & \text{если } P_O > P_N \\ U_F = \vec{U}_N \cdot \vec{n}_F, & \text{если } P_O < P_N \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta U = \vec{U}_N \cdot \vec{n}_F - \vec{U}_O \cdot \vec{n}_F, & \text{если } P_O > P_N \\ \Delta U = \vec{U}_O \cdot \vec{n}_F - \vec{U}_N \cdot \vec{n}_F, & \text{если } P_O < P_N \end{cases}$$

Затем обозначим параметры на фронте ударной волны через знак + а перед фронтом через знак -. Приняв скорость на фронте как скорость в ячейке определим остальные параметры из условий Гюгио и уравнения состояния для данного вещества.

$$\begin{cases} WV_+ + U_+ = WV_- + U_- \\ WU_+ - P_+ = WU_- - P_- \\ WE_+ - P_+U_+ = WE_- - P_-U_- \\ P = f(E, V) \end{cases}$$

P – давление,
 \vec{U} – вектор скорости,
 \vec{n}_F – нормаль грани,
 F – значение на грани,
 O – значение в центре ячейки-владельца,
 N – значение в центре ячейки-соседа,
 w – скорость распространения ударной волны,

γ – показатель адиабаты,
 ρ – плотность.

Значения на гранях, метод Куропатенко

При гладком течении, значения на гранях определяются с использованием дифференциальных уравнений для гладкого течения:

$$P_F^* = P_F - \left(\frac{1}{\rho_F^n (A_F^n)^2} (U_N^n - U_O^n) \right) \frac{dt_{Fh}}{2} \frac{1}{l_{OF} + l_{NF}},$$

$$U_F^* = U_F - ((P_N^n - P_O^n)) \frac{1}{\rho_F^n} \frac{dt_{Fh}}{2} \frac{1}{l_{OF} + l_{NF}}$$

После определения значений на гранях происходит накопление потоков величин. Для каждой ячейки сетки находится сумма промежуточных потоков через все прилежащие к ней грани.

$$\widehat{P}_C = \sum S_{Fh} P_F^* dt_F$$

$$\widehat{U}_C = \sum S_{Fh} U_F^* dt_F$$

$$\widehat{E}_C = \sum S_{Fh} U_F^* P_F^* dt_F$$

Численный метод. Первый этап

Промежуточные величины полной энергии и скорости определим, как изменение за счёт силового воздействия:

$$\tilde{U}_O^n = \vec{U}_O^n - \frac{1}{V_o \rho_O^n} \widehat{P}_C$$

$$\tilde{\varepsilon}_O^n = \varepsilon_O^n - \frac{1}{V_o \rho_O^n} \widehat{E}_C$$

$$\tilde{\rho}_O^n = \rho_O^n - \frac{\rho_O^n}{V_o} \widehat{U}_C.$$

Причём, потоки величин вычисляются как

$$\begin{cases} J_l^U = S_F \tilde{\rho}_O^n \tilde{U}_{N_l}^n U_F, & \text{если } U_F < 0 \\ J_l^U = S_F \tilde{\rho}_O^n \tilde{U}_{O_l}^n U_F, & \text{если } U_F > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = S_F \tilde{\rho}_O^n \tilde{\varepsilon}_N^n U_F, & \text{если } U_F < 0 \\ \xi = S_F \tilde{\rho}_O^n \tilde{\varepsilon}_O^n U_F, & \text{если } U_F > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m = S_F \tilde{\rho}_O^n U_F, & \text{если } U_F < 0 \\ m = S_F \tilde{\rho}_O^n U_F, & \text{если } U_F > 0 \end{cases}$$

Затем происходит накопление потоков импульса массы и энергии аналогично 1 этапу.

$$\widehat{J}_l^U = \sum S_{F_h} J_l^U dt_F$$

$$\widehat{\xi} = \sum S_{F_h} \xi dt_F$$

$$\widehat{m} = \sum S_{F_h} m dt_F$$

Численный метод. Второй этап

Получим окончательные значения величины полной энергии и скорости, учтя «потоки» величин через грани ячеек:

$$\begin{aligned}\rho_0^{n+1} &= \tilde{\rho}_0^n - \frac{1}{V_0} \widehat{m} \\ \vec{U}_{0l}^{n+1} &= \tilde{U}_{0l}^n - \frac{dt}{V_0 \rho_0^{n+1}} \widehat{J}_l^{\vec{U}} \\ \varepsilon_0^{n+1} &= \tilde{\varepsilon}_0^n - \frac{1}{V_0 \rho_0^{n+1}} \widehat{\xi}\end{aligned}$$

Численный метод. Замыкание.

Определим внутреннюю энергию

$$E^{n+1} = \varepsilon^{n+1} - \frac{(\vec{U}^{n+1})^2}{2}$$

Далее определим давление на новом временном слое воспользовавшись уравнением состояния

$$P^{n+1} = f(\rho^{n+1} E^{n+1})$$

3.

Результаты расчётов

Тестовая задача 1

В области 1 находится газ, с параметрами:

$$P_0 = 10^6 \text{ Па}, T_0 = 273 \text{ К}, U_0 = 0 \text{ м/с}, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1,$$

В области 2 газ, с параметрами:

$$P_1 = 10^5 \text{ Па}, T_1 = 273 \text{ К}, U_1 = 0 \text{ м/с}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,$$

где α_1 – воздух, α_2 – водород, $c_{p1} = 1,006 \cdot 10^3$, $c_{v1} = 0,717 \cdot 10^3$, $c_{p2} = 14,307 \cdot 10^3$ Дж/К, $c_{v2} = 10,183 \cdot 10^3$ Дж/К

Граничные условия:

$$|\vec{U}_L| = |\vec{U}_R| = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Разномасштабность сетки 2^3

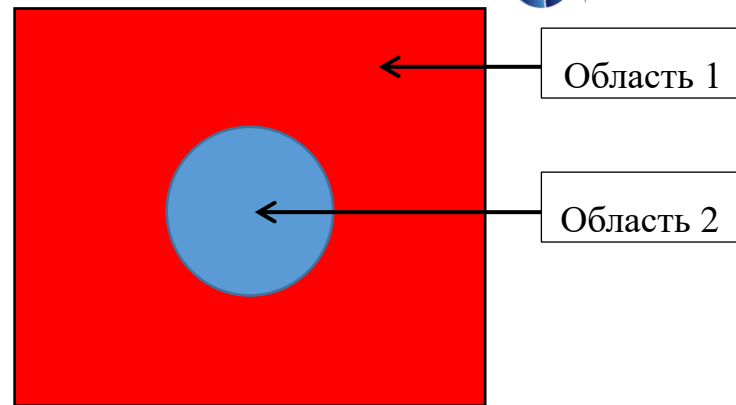


Рисунок 1. Схема расчетной области для задачи 1

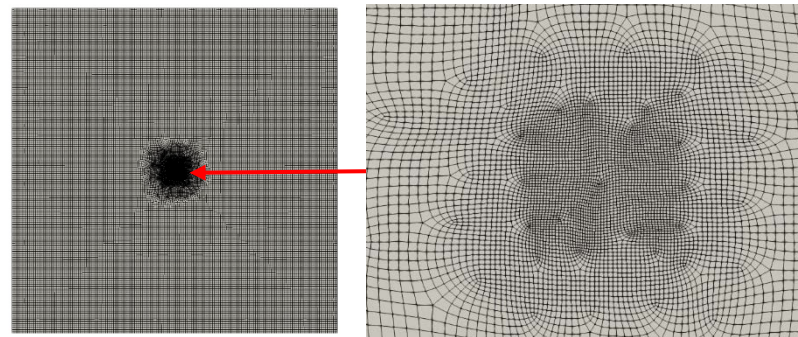
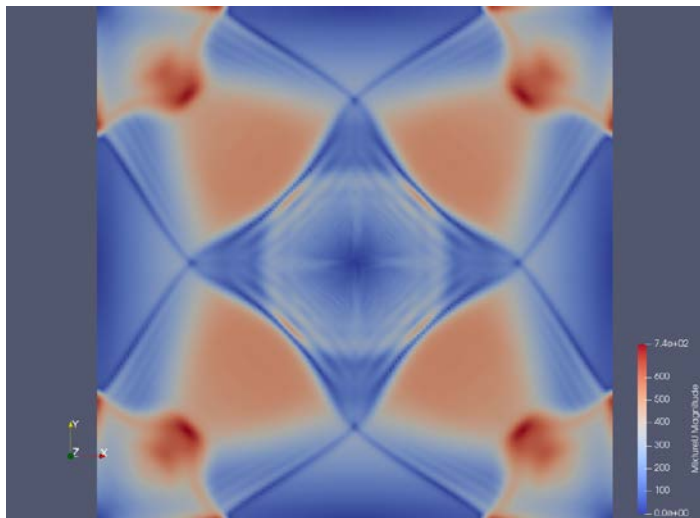
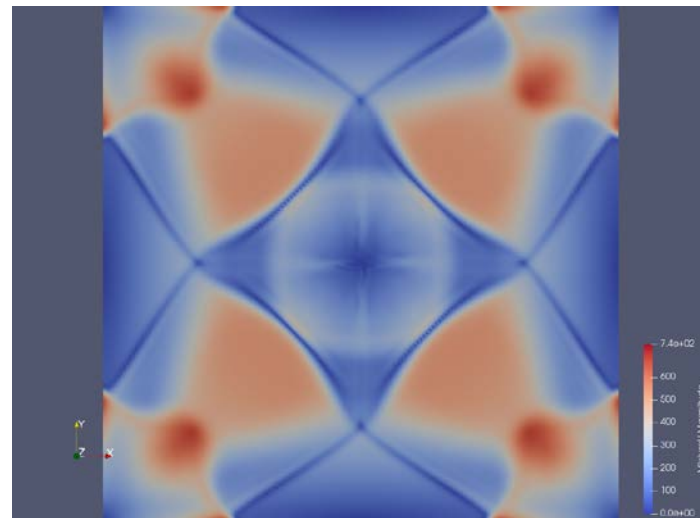


Рисунок 2. Сеточная модель для задачи 1.

Тестовая задача 1



а) распределённый шаг по времени
(машинное время 267,077 с)



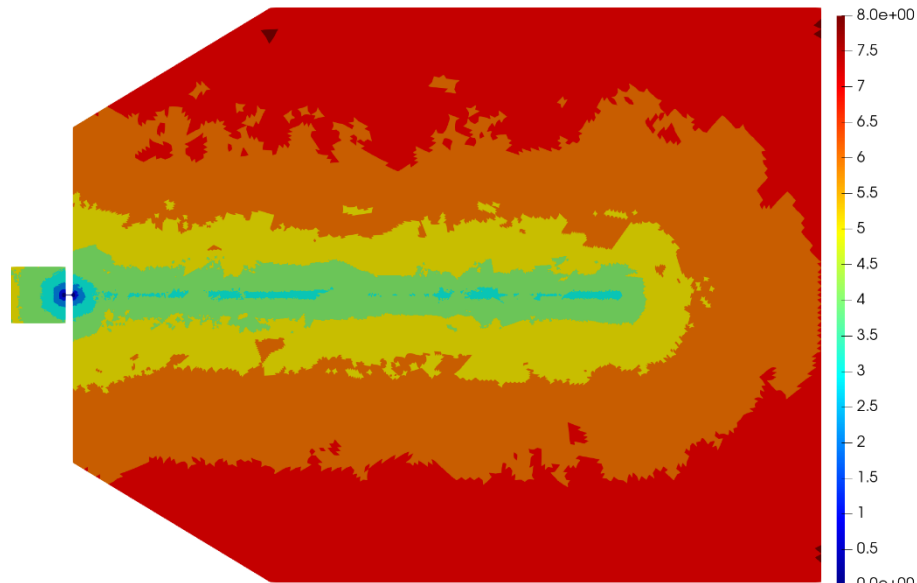
б) классический подход
(машинное время 923,721 с)

Распределение поля скорости в момент времени $t = 0,0016$ с (а – распределённый шаг по времени б – классический подход)

Истечение из сосуда высокого давления.

Окружающая область заполнена воздухом при нормальных условиях. Истечение водорода под давлением 100 атм происходит из сопла диаметром 1 мм .

На рисунке 4 представлено разбиение разномасштабной сетки, где отношение шагов по времени в различных областях достигает 2^8 раз.



Разбиение на подобласти расчётной сетки.

Истечение из сосуда высокого давления..

Результаты



Моделирование струйного истечения с использованием распределённого шага по времени
(5 д. 4 ч.).

4.

Заключение

Заключение

- Разработанный алгоритм подходит для расчётов разномасштабных задач.
- Многократно уменьшается время расчёта разномасштабных процессов.
- Снижение сеточной диффузии в крупных ячейках.

**Спасибо за
внимание!**

Мастюк Дмитрий Александрович

mastyukda@vniitf.ru

29.05.2023