

ПРИМЕНЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С.П. Баутин, О.А. Карелина, А.Г. Обухов
СФТИ НИЯУ МИФИ, РФЯЦ-ВНИИТФ, ТИУ



Введение

- Жан-Батист Жозеф Фурье в 1804 году начал работу по описанию распространения тепла в твердом теле. Ученый Био считал, что это он первым предложил соответствующую теорию по распространению тепла.
- В 1807 году Ж-Б.Ж. Фурье представил доклад на эту тему с описанием метода представления решений тригонометрическими рядами:

$$u_t = \mu_0 u_{xx}; \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx);$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx) = -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(kx);$$
$$u'_k(t) = -\mu_0 k^2 u_k(t); \quad u_k(t) = u^0 e^{-\mu_0 k^2 t};$$

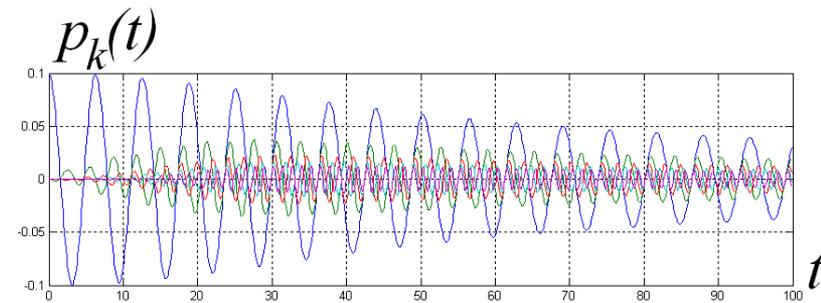
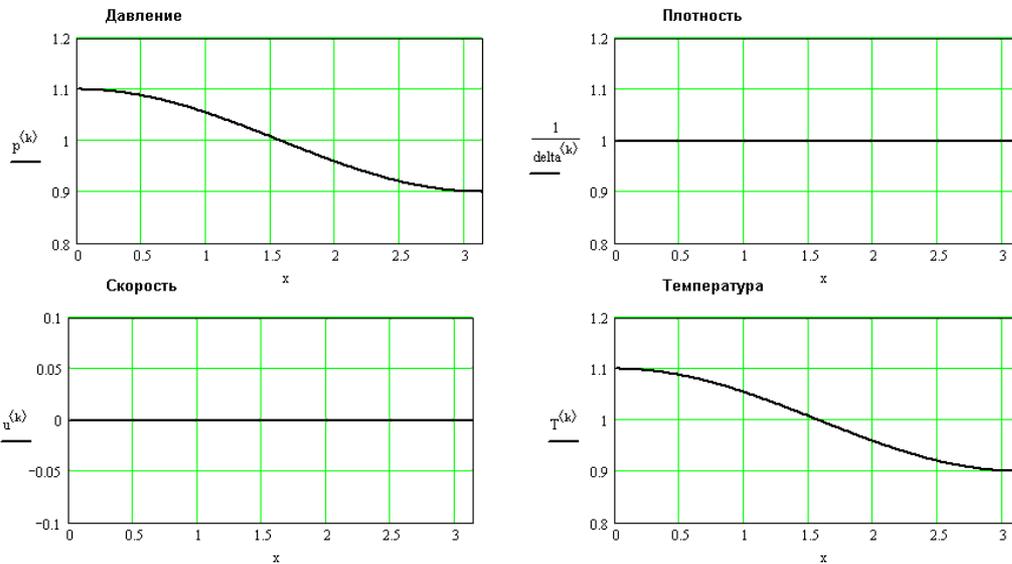
сходимость устанавливается просто, нет других гармоник, кроме участвующих в начальных условиях.

- Лагранж и Лаплас не могли смириться с тем, что Фурье не использовал степенные ряды. Пуассон пробовал в этой задаче использовать степенные ряды.
- Через 70 лет С.В. Ковалевская привела контрпример, когда степенной ряд, являющийся решением линейного уравнения теплопроводности, расходится при любом t , отличном от нуля.

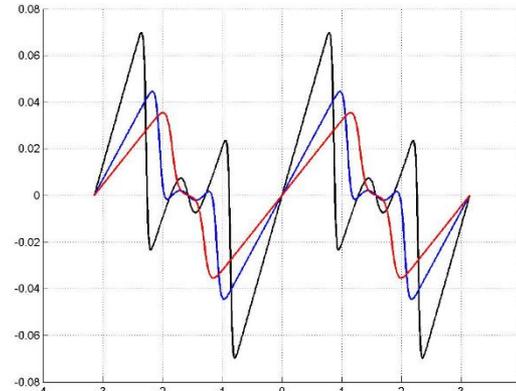
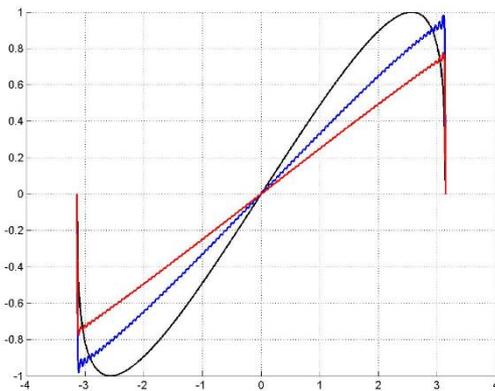
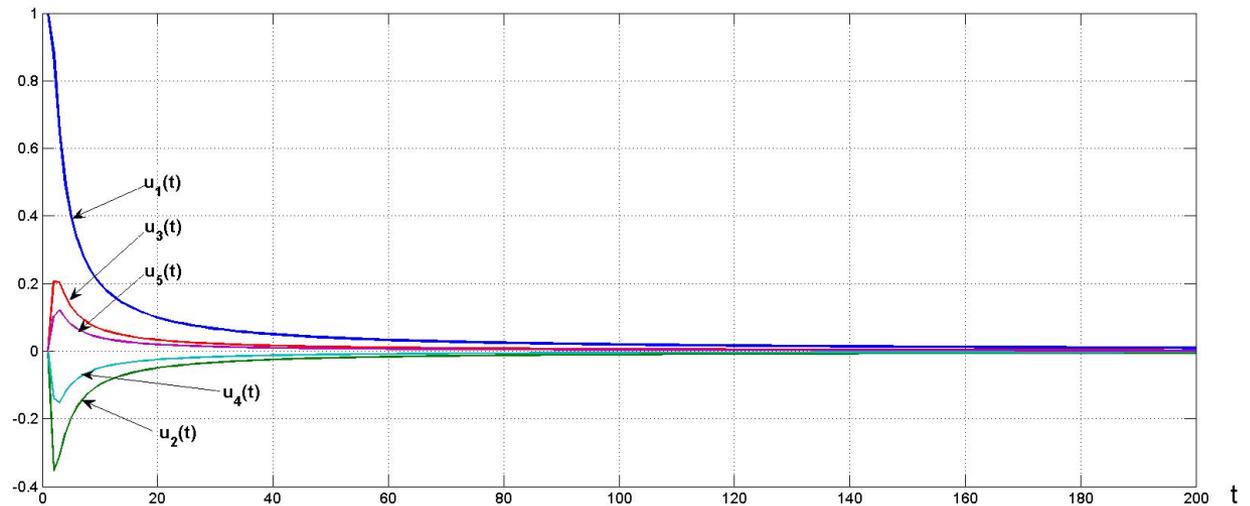
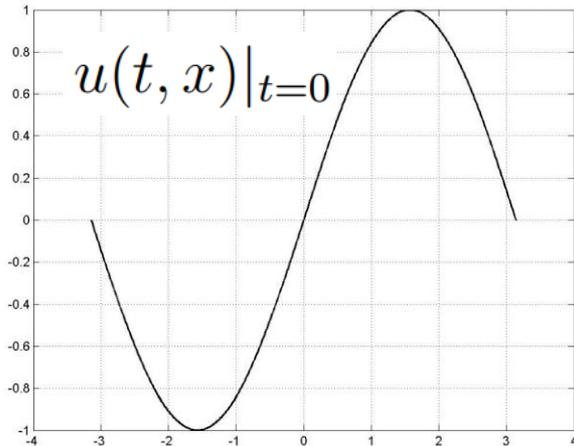
Чуть более 10 лет назад, то есть спустя 200 лет после Фурье впервые тригонометрические ряды были применены для решения нелинейных уравнений с частными производными: получены содержательные одномерные нестационарные решения, но доказать сходимость не удалось.

Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, 2014.

$K = 50$ $\gamma = 1.4$ $\kappa = 0.001$ $\mu = 0.001$ $p_0 = 1 + 0.1 \cos(x)$ время(с) $u = 0$



Уравнение Бюргерса: $u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}$



Сходимость тригонометрических рядов доказать удалось.

[2] Баутин С.П., Замыслов В.Е. Сходимость бесконечных тригонометрических рядов, решающих уравнение Бюргерса. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2022.

Решения системы уравнений движения

Рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой описывают движения сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \rho \left[\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \frac{1}{\gamma} (T \nabla \rho + \rho \nabla T) = \mu_0 \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ \rho (T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T) + (\gamma - 1) \rho T \operatorname{div} \mathbf{V} = \kappa_0 \Delta T + \Phi(\mu_0, \mathbf{V}), \end{cases}$$

Из нее берутся уравнения движения в предположении постоянных значений плотности и температуры:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mu_0 \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right].$$

Далее предполагается: $\frac{\partial}{\partial z} = w = 0$

и получается система уравнений движения:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = \mu_0 \left(u_{xx} + \frac{3}{4} u_{yy} + \frac{1}{4} v_{xy} \right), \\ v_t + uv_x + vv_y = \mu_0 \left(\frac{3}{4} v_{xx} + v_{yy} + \frac{1}{4} u_{xy} \right), \end{cases} \quad (1)$$

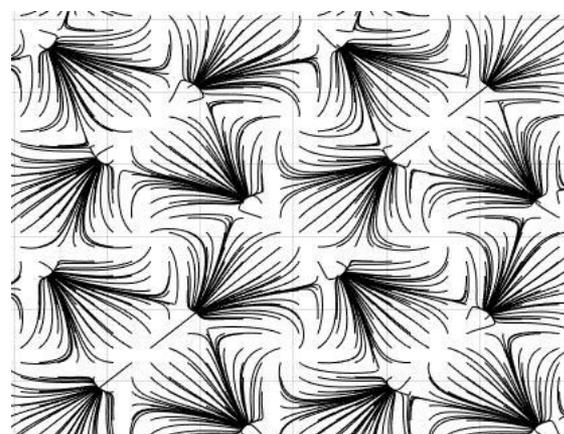
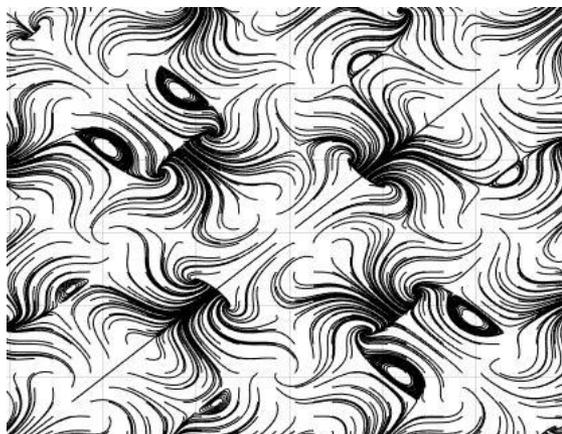
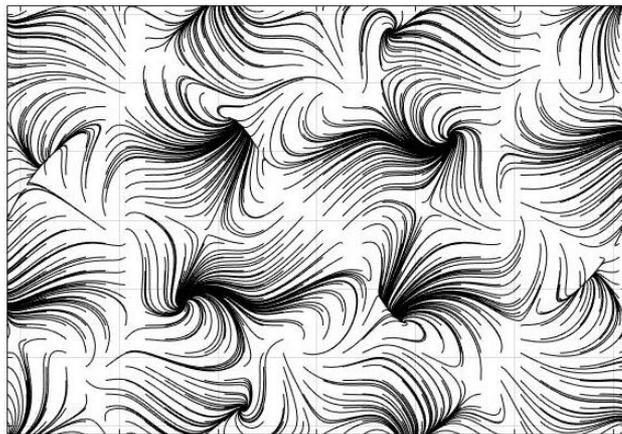
Для системы (1) ставятся начальные условия

$$\begin{cases} u(t, x, y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} [u_{k,1}^o \sin(kx) + u_{k,2}^o \sin(ky)], \\ v(t, x, y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} [v_{k,1}^o \sin(kx) + v_{k,2}^o \sin(ky)], \end{cases} \quad (2)$$

с абсолютно сходящимися числовыми рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}^o; \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}^o; \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}^o; \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,2}^o \quad (3)$$

Задача Коши (1), (2) имеет произвол в задании начальных условий, например, с такими мгновенными линиями тока в момент $t = 0$:



«Кто-то хотел увидеть турбулентность?»

Дело осталось за малым:

построить решения с такими начальными данными.

Решение ищется в виде

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [u_{k,1}(t) \sin(kx) + u_{k,2}(t) \sin(ky)], \\ v(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [v_{k,1}(t) \sin(kx) + v_{k,2}(t) \sin(ky)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ряды (4) подставляются в систему (1):

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} u'_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} u'_{m,2}(t) \sin(my) = \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,2}(t) \sin(my) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} k u_{k,1}(t) \cos(kx) \right] - \\ &- \left[\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,2}(t) \sin(my) \right] \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} m u_{m,2}(t) \cos(my) \right] + \\ &+ \mu_0 \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_{k,1}(t) \sin(kx) - \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,2}(t) \sin(my) \right]; \\ \\ &\sum_{k=1}^{\infty} v'_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} v'_{m,2}(t) \sin(my) = \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,2}(t) \sin(my) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} k v_{k,1}(t) \cos(kx) \right] - \\ &- \left[\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,2}(t) \sin(my) \right] \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} m v_{m,2}(t) \cos(my) \right] + \\ &+ \mu_0 \left[- \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 v_{k,1}(t) \sin(kx) - \sum_{m=1}^{\infty} m^2 v_{m,2}(t) \sin(my) \right]. \end{aligned} \right.$$

Эти два уравнения проецируются на функциональные базисы

$$\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \dots\}; \quad \{\sin(y), \sin(2y), \sin(3y), \dots\};$$

и получаются четыре группы бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для бесконечного числа искомым коэффициентов рядов (4):

$$u'_{\ell,1}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) u_{m,1}(t) b_{k,\ell,m} - \mu_0 \ell^2 u_{\ell,1}(t); \quad (5)$$

$$v'_{\ell,1}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) v_{m,1}(t) b_{k,\ell,m} - \frac{3}{4} \mu_0 \ell^2 v_{\ell,1}(t); \quad (6)$$

$$u'_{\ell,2}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k v_{m,2}(t) u_{k,2}(t) b_{\ell,m,k} - \frac{3}{4} \mu_0 \ell^2 u_{\ell,2}(t); \quad (7)$$

$$v'_{\ell,2}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k v_{k,2}(t) v_{m,2}(t) b_{\ell,m,k} - \mu_0 \ell^2 v_{\ell,2}(t); \quad (8)$$

$$\ell = 1, 2, 3, \dots \quad b_{k\ell m} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = |k - \ell|; \\ -1, & \text{если } m = k + \ell; \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

системы
расщепи-
лись,

(5) и (8)
совпали
с СОДУ
для
ур-ния
Бюргерса

Свойства исследуемых решений

Теорема. Если числовые ряды (3) сходятся абсолютно, то тригонометрические ряды (4) абсолютно сходятся в некоторой окрестности точки $t = 0$ и при всех значениях переменных x и y .

Для доказательства рассматриваются две вспомогательных задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = -UU_x + \mu_0 U_{xx}, \\ U(t, x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}^o \sin(kx). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t = -VV_x - \mu_0 V; \\ V|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}^o \sin(kx), \end{array} \right.$$

с решениями:

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \sin(kx); \quad V(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin kx.$$

Теоремы о кратных частотах

Ранее для одномерных течений вязкого теплопроводного газа доказана теорема о кратных частотах: если ненулевые начальные данные имеются только у гармоник с частотами $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$, то в решении могут присутствовать гармоники только с частотами, кратными $d = \text{НОД}(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$.

В данной работе:

Т.1. $u_{\ell,1}(0) = 0$, если $\ell \notin \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\}$; $d_1 = \text{НОД}(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$

$L_{d_1} = \{d_1, 2d_1, 3d_1, \dots\}$; $u_{\ell,1}(t) \equiv 0$, если $\ell \notin L_{d_1}$.

Т.2. $v_{\ell,1}(0) = 0$, если $\ell \notin \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$; $d_2 = \text{НОД}(\underline{d_1}, q_0, q_1, \dots, q_m)$

$L_{d_2} = \{d_2, 2d_2, 3d_2, \dots\}$; $v_{\ell,1}(t) \equiv 0$, если $\ell \notin L_{d_2}$.

Т.3. $v_{\ell,2}(0) = 0$, если $\ell \notin \{s_0, s_1, \dots, s_{n_1}\}$; $d_3 = \text{НОД}(s_0, s_1, \dots, s_{n_1})$

$L_{d_3} = \{d_3, 2d_3, 3d_3, \dots\}$; $v_{\ell,2}(t) \equiv 0$, если $\ell \notin L_{d_3}$.

Т.4. $u_{\ell,2}(0) = 0$, если $\ell \notin \{r_0, r_1, \dots, r_{m_1}\}$; $d_4 = \text{НОД}(\underline{d_3}, r_0, r_1, \dots, r_{m_1})$

$L_{d_4} = \{d_4, 2d_4, 3d_4, \dots\}$; $u_{\ell,2}(t) \equiv 0$, если $\ell \notin L_{d_4}$.

Следовательно, частоты разделены как по независимым переменным, так и по направлениям распространения.

Если: $\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\} = \{q_0, q_1, \dots, q_m\} = \{s_0, s_1, \dots, s_{n_1}\} = \{r_0, r_1, \dots, r_{m_1}\}$,

то «немой аккорд» имеет место.

- Замыслов В. Е. Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье–Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии. 2013. Том 18. № 2.
- Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, Екатеринбург: УрГУПС, 2014.
- Курмаева К.В., Титов С. С. Специальные ряды с кратными частотами для одномерных течений сжимаемого газа в обобщении теорем В.Е. Замыслова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2016. № 3.
- **Немой аккорд:** Р. Шуман, М. Равель, К. Дюбесси и др.
- Алдошина И., Приттс Р. Музыкальная акустика. – СПб.: Композитор, 2006.
- **Нет удвоения частот:**
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

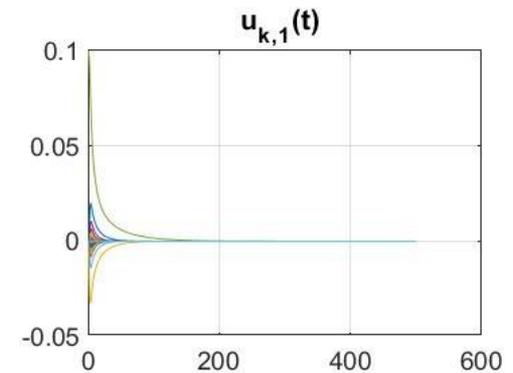
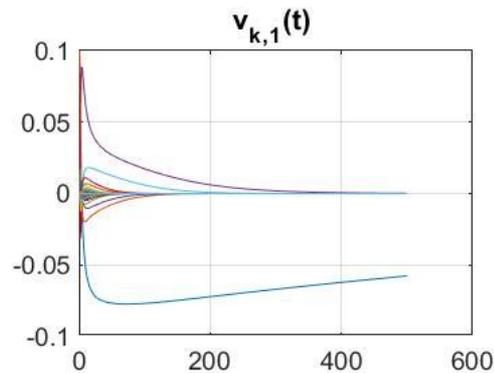
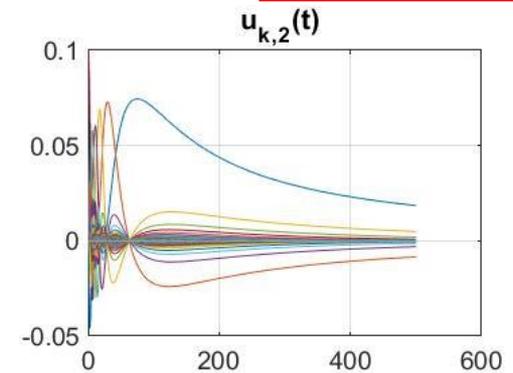
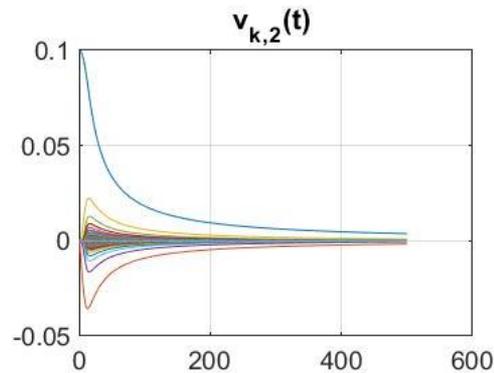
Расчет конкретного приближенного решения

(вариант "5-7-9-1")

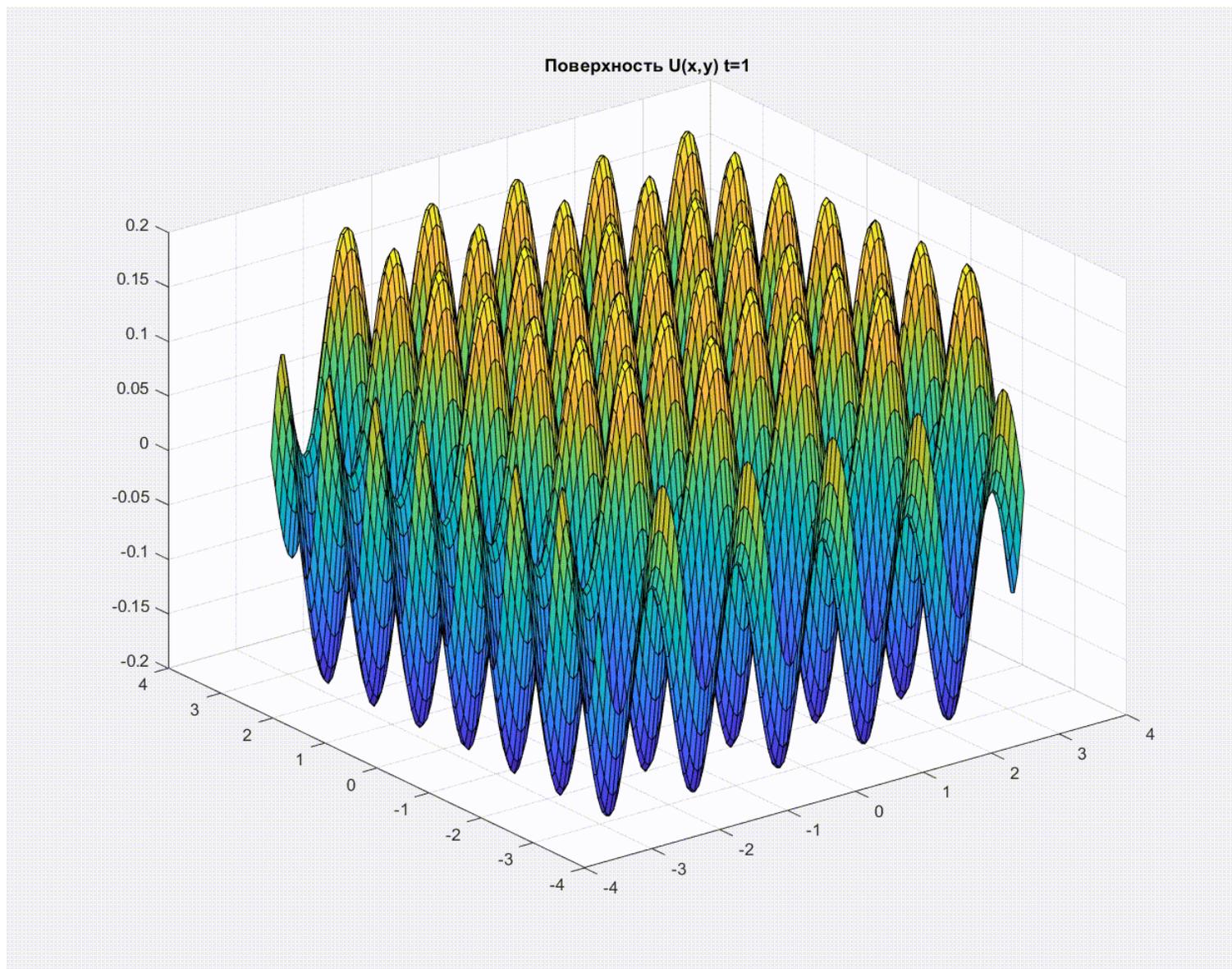
Число слагаемых в тригонометрических суммах $K = 300$,
начальные данные:

$$\begin{cases} u(t, x, y) \Big|_{t=0} = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(7y) \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} = 0.1\sin(9x) + 0.1\sin(1y) \end{cases}$$

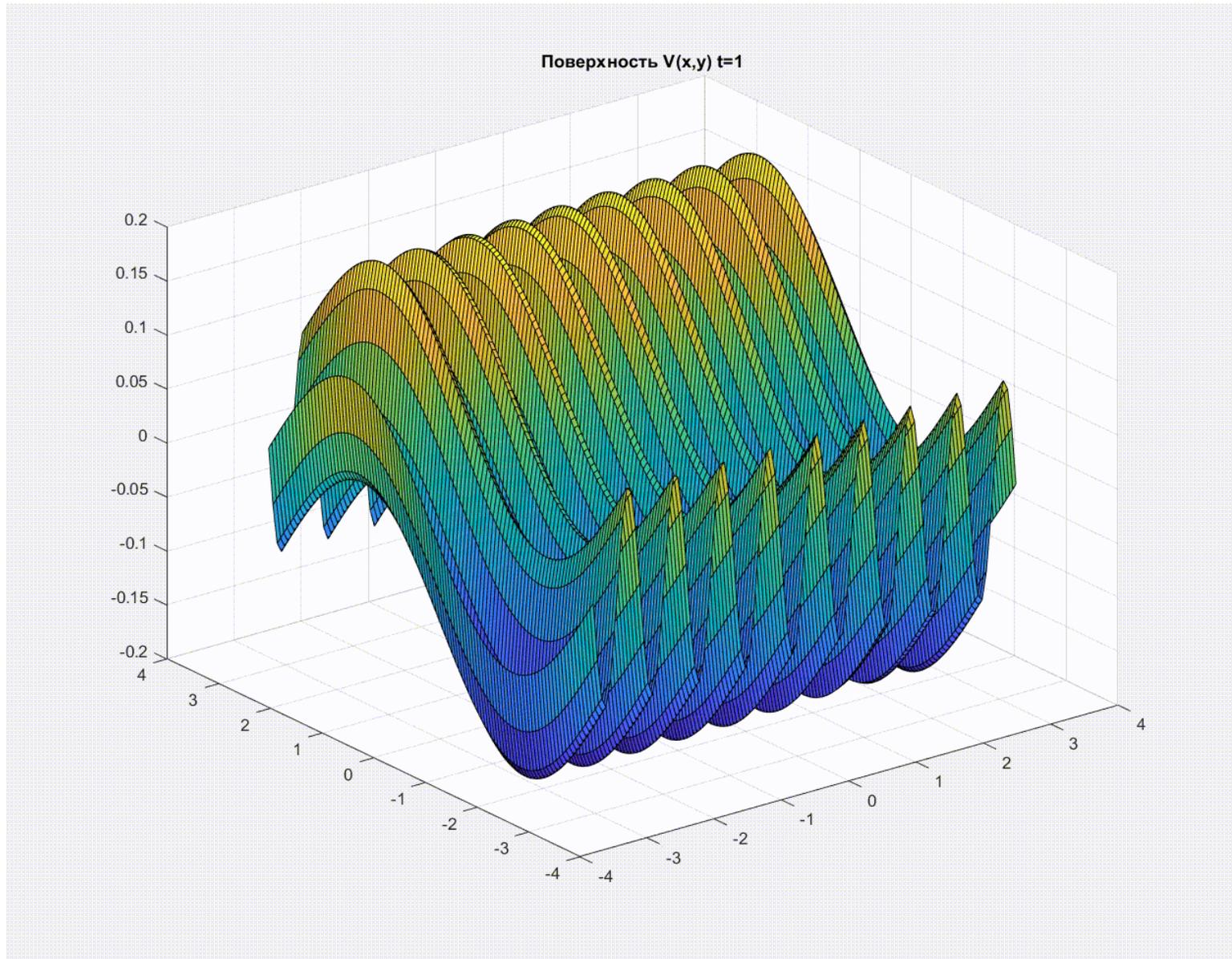
Поведение коэффициентов тригонометрических сумм в зависимости от времени:



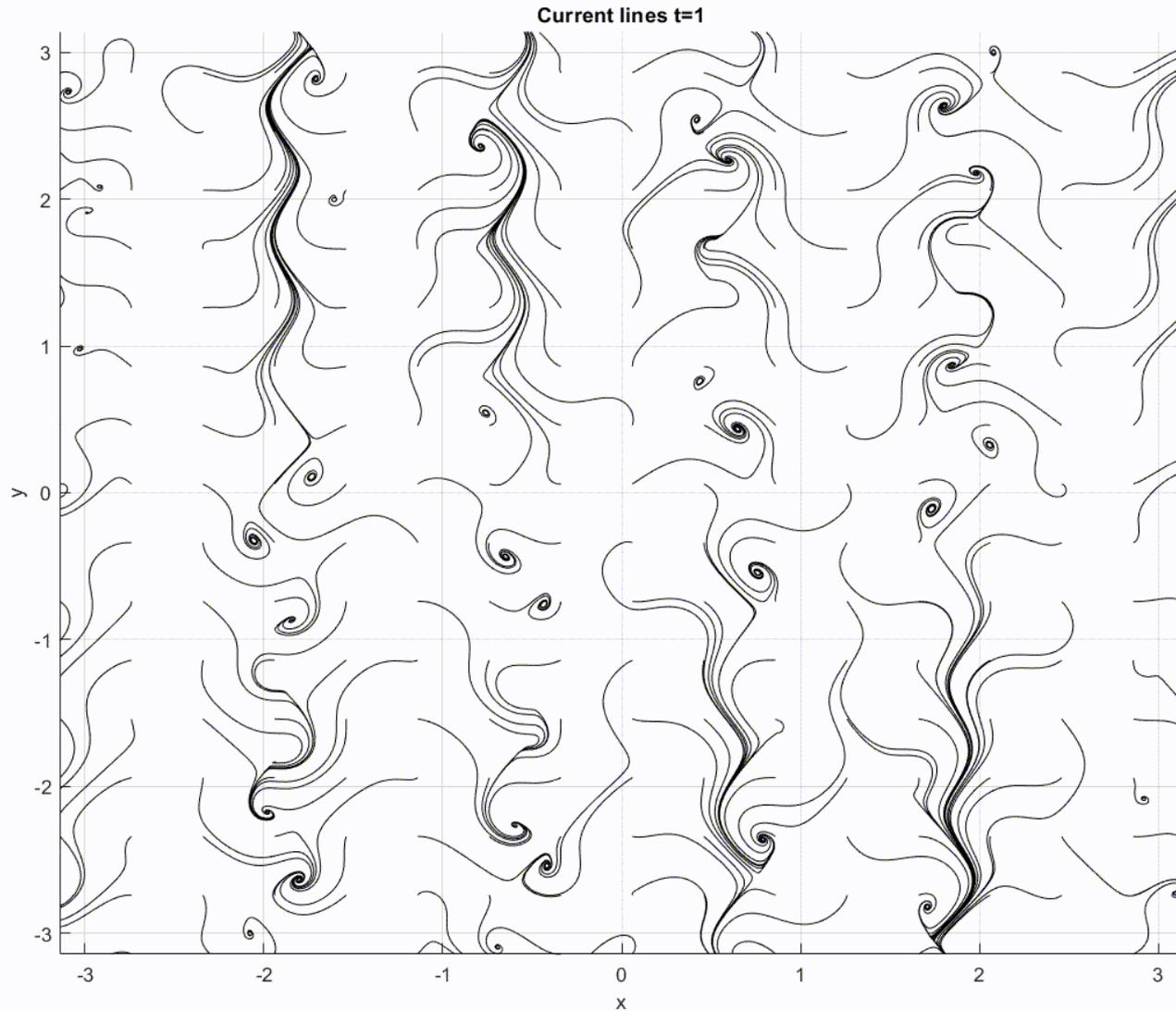
Поведение поверхности $u(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$

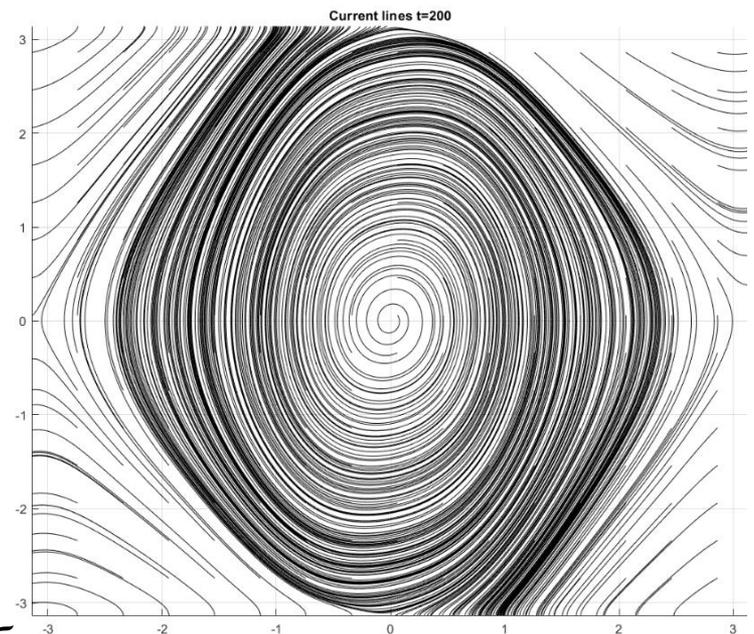
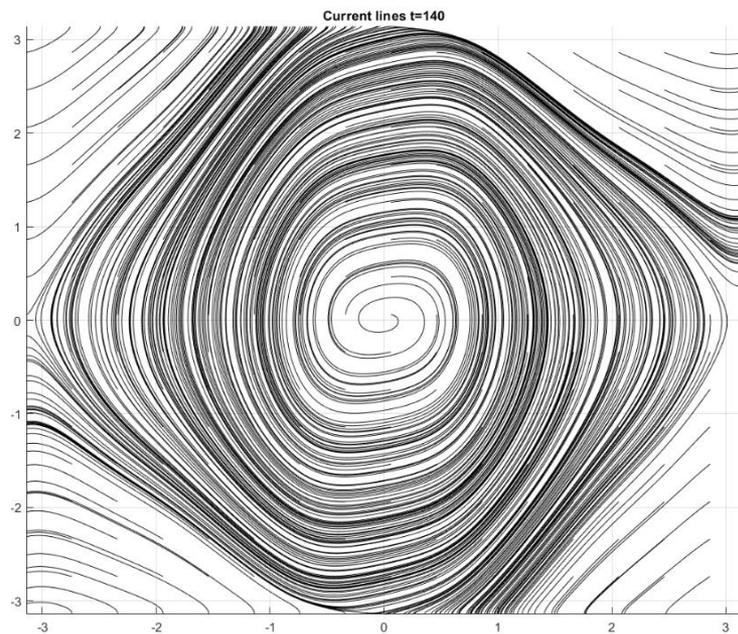
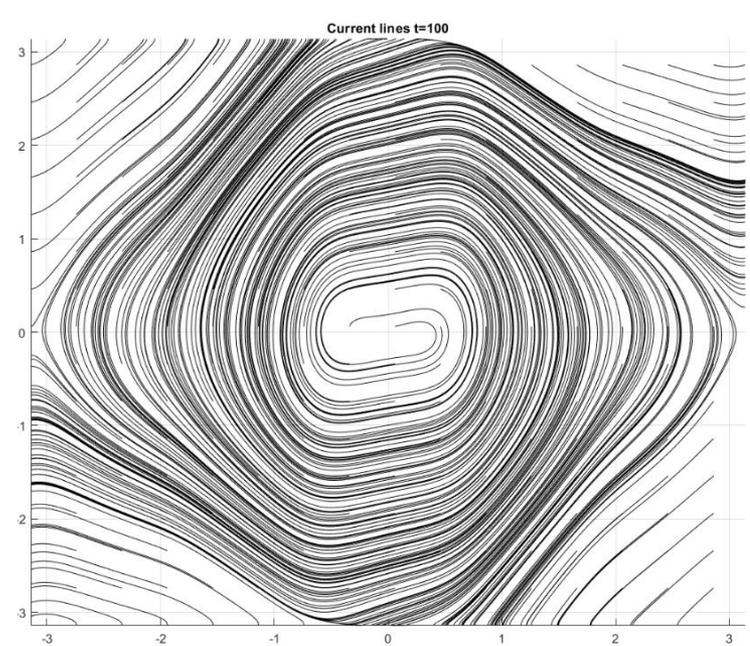
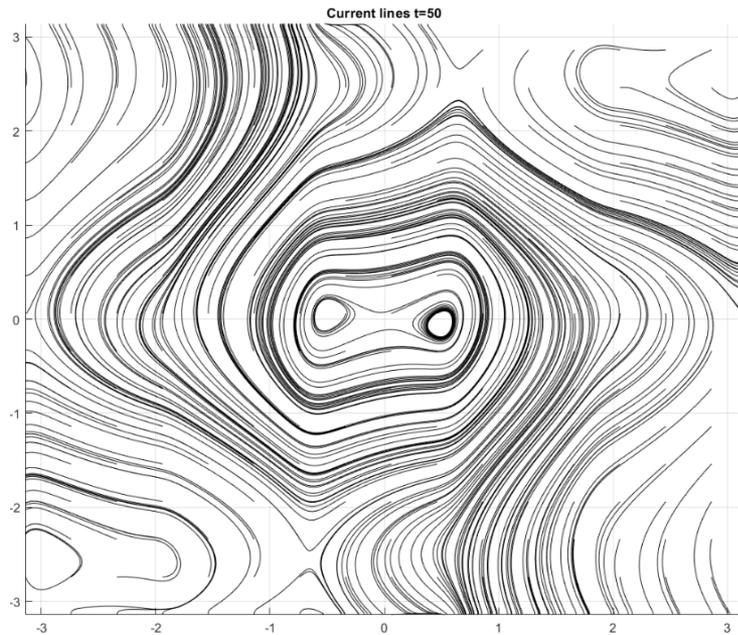


Поведение поверхности $v(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$



Поведение мгновенных линий тока при $0 \leq t \leq 200$





Встречные вертикальные потоки не изменяя общего направления движения образуют в центре один эллиптический вихрь

Расчет конкретного приближенного решения

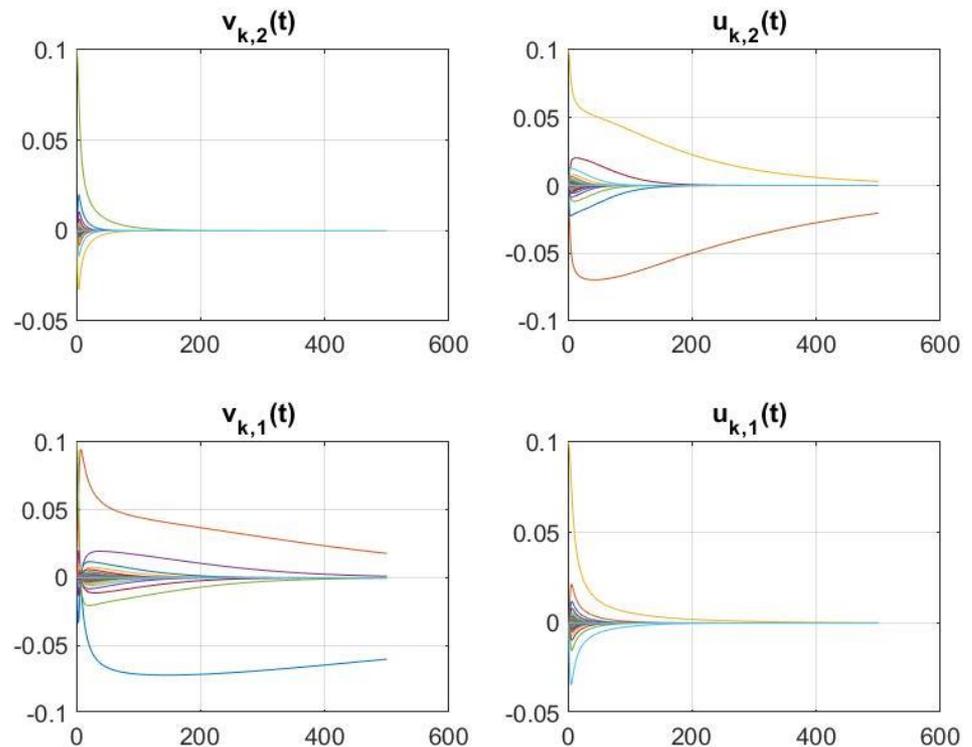
(вариант "3-3-5-5)

Число слагаемых в тригонометрических суммах $K=300$,

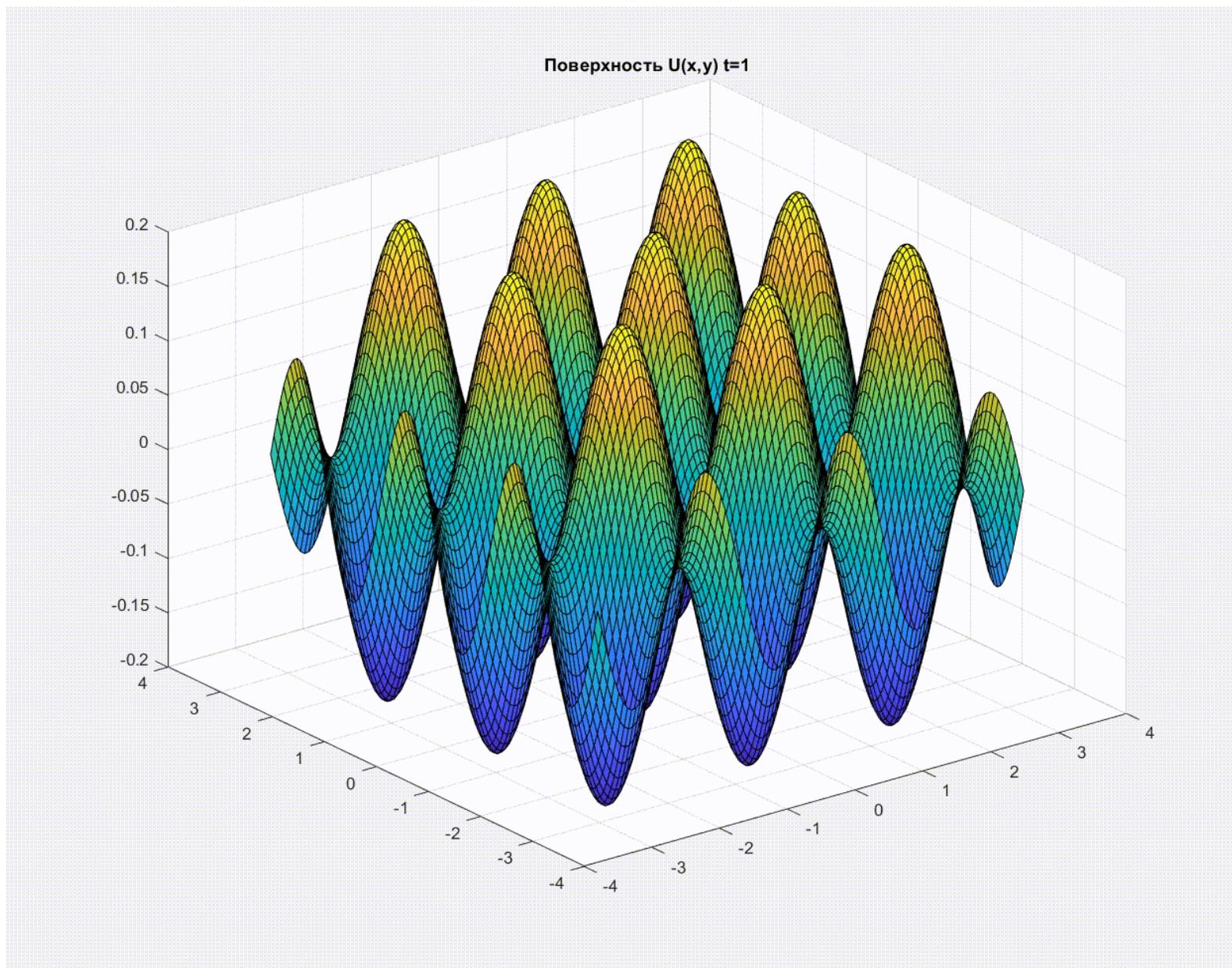
начальные данные:

$$\begin{cases} u(t, x, y) \Big|_{t=0} = 0.1\sin(3x) + 0.1\sin(3y) \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(5y) \end{cases}$$

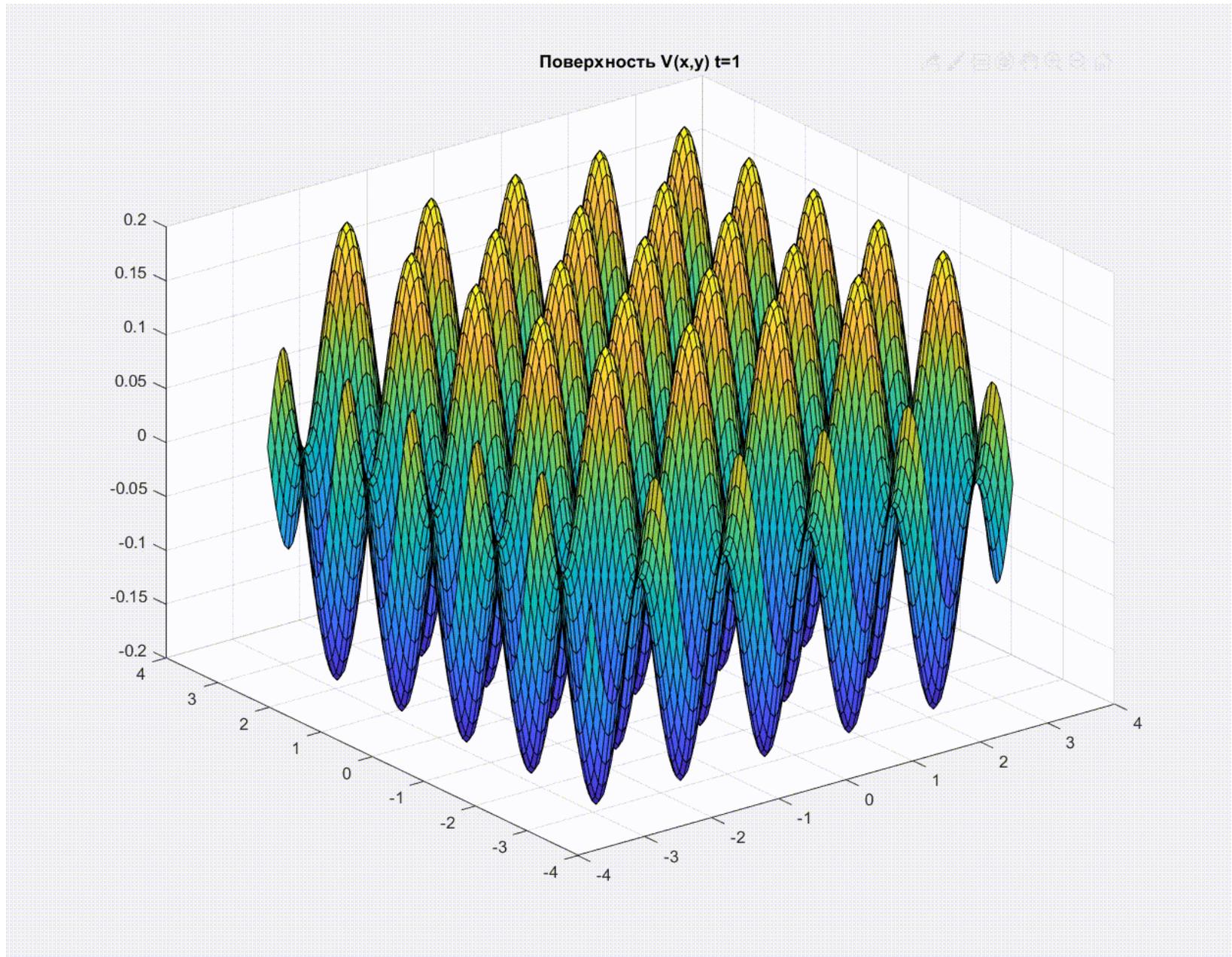
Поведение коэффициентов тригонометрических сумм в зависимости от времени



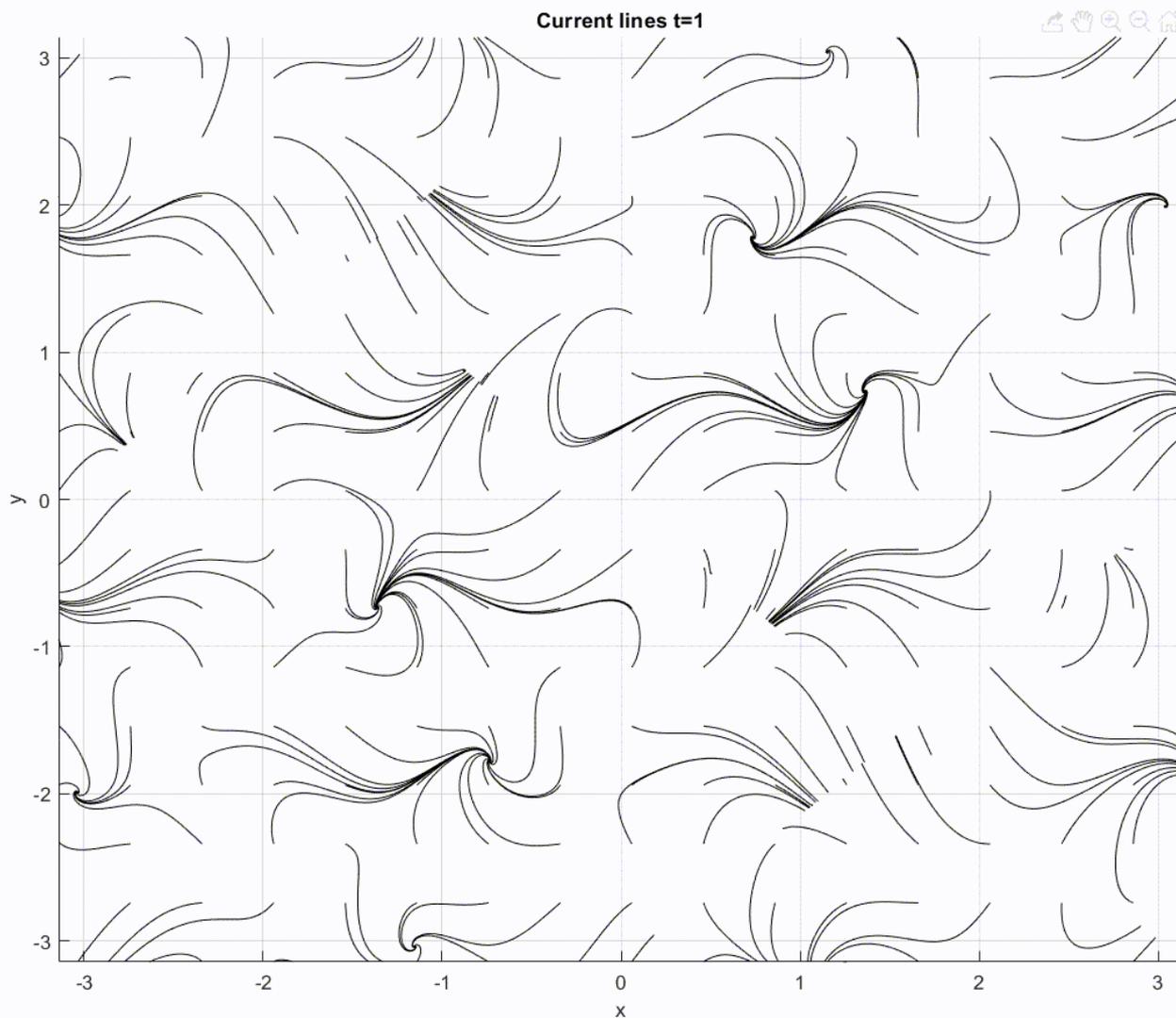
Поведение поверхности $u(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$

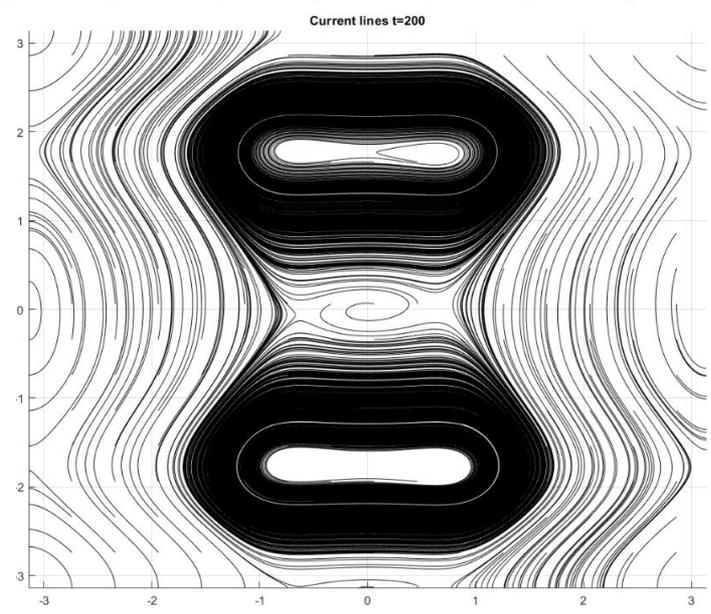
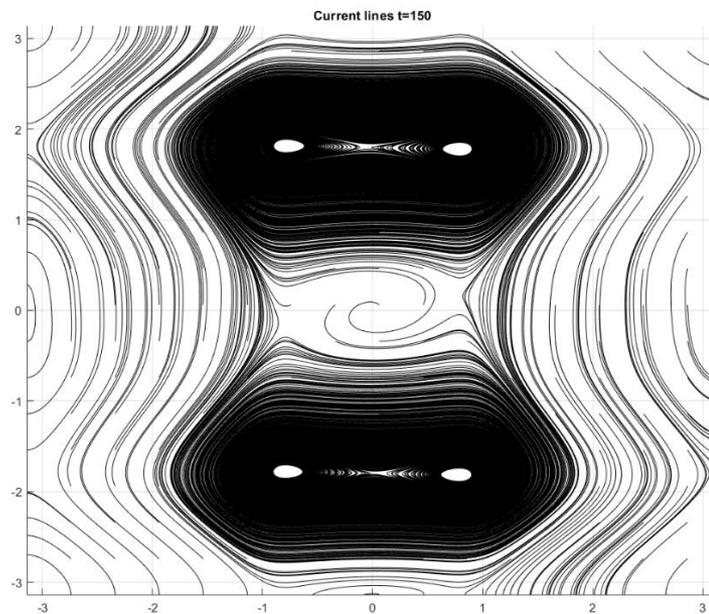
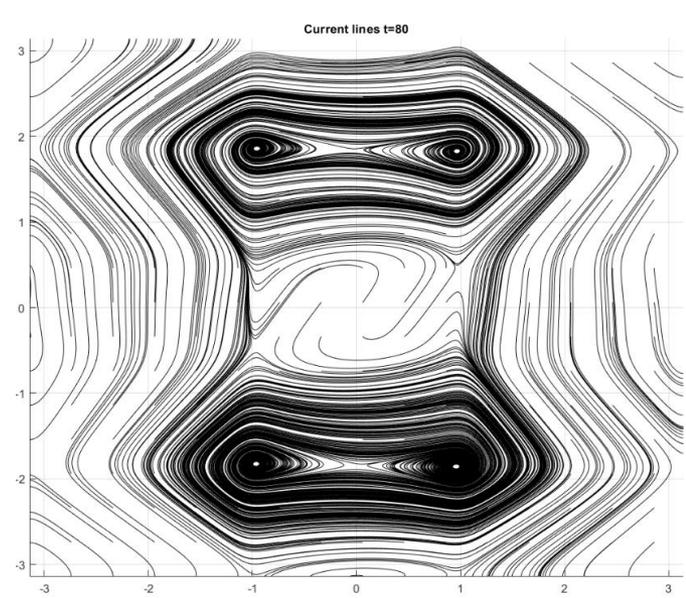
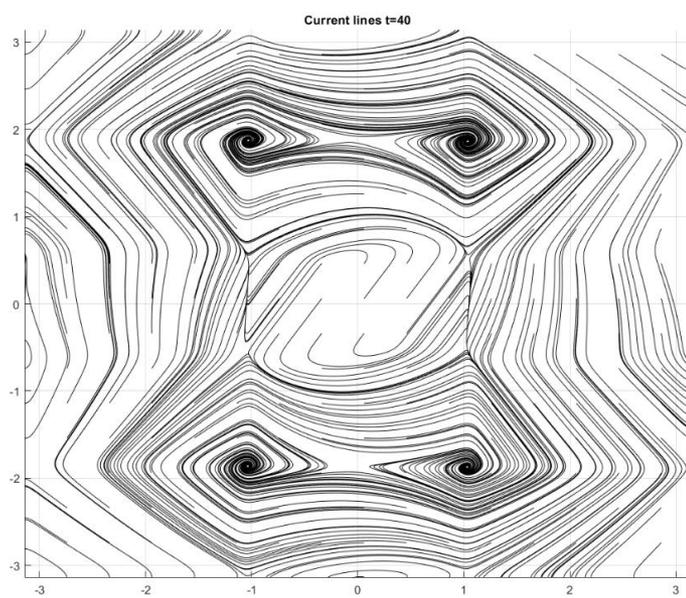


Поведение поверхности $v(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$



Поведение мгновенных линий тока при $0 \leq t \leq 200$





Встречные потоки не изменяя общего направления движения образуют в центре пять вихрей, вращающиеся в соответствующие стороны - как шестеренки

Расчет конкретного приближенного решения

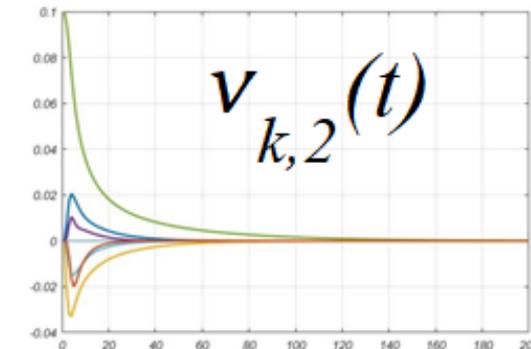
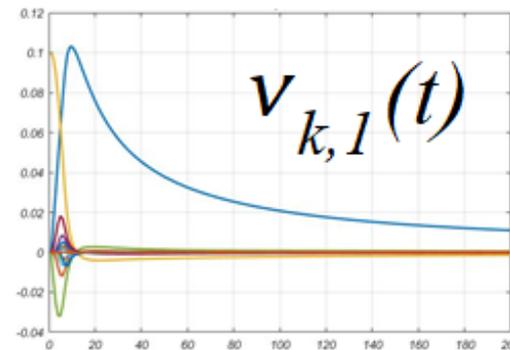
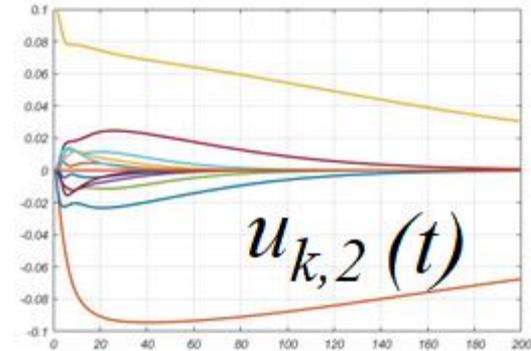
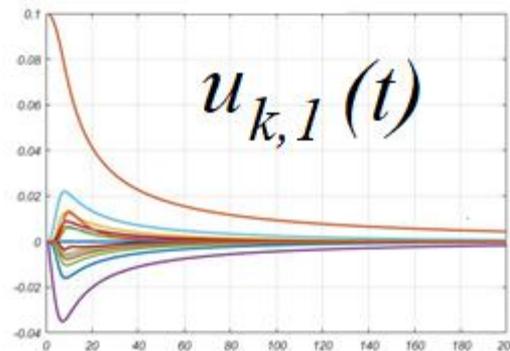
(вариант "3-5-5-3")

Число слагаемых в тригонометрических суммах $K = 300$,
начальные данные:

$$u(t, x, y)|_{t=0} = 0.1 \sin(3x) + 0.1 \sin(5y),$$

$$v(t, x, y)|_{t=0} = 0.1 \sin(5x) + 0.1 \sin(3y).$$

Поведение коэффициентов тригонометрических сумм в зависимости
от времени:



Общая кинетическая энергия потока

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [u^2(t, x, y) + v^2(t, x, y)] dx dy = \pi^2 \sum_{k=1}^{K2} [u_{k,1}^2(t) + u_{k,2}^2(t) + v_{k,1}^2(t) + v_{k,2}^2(t)]$$

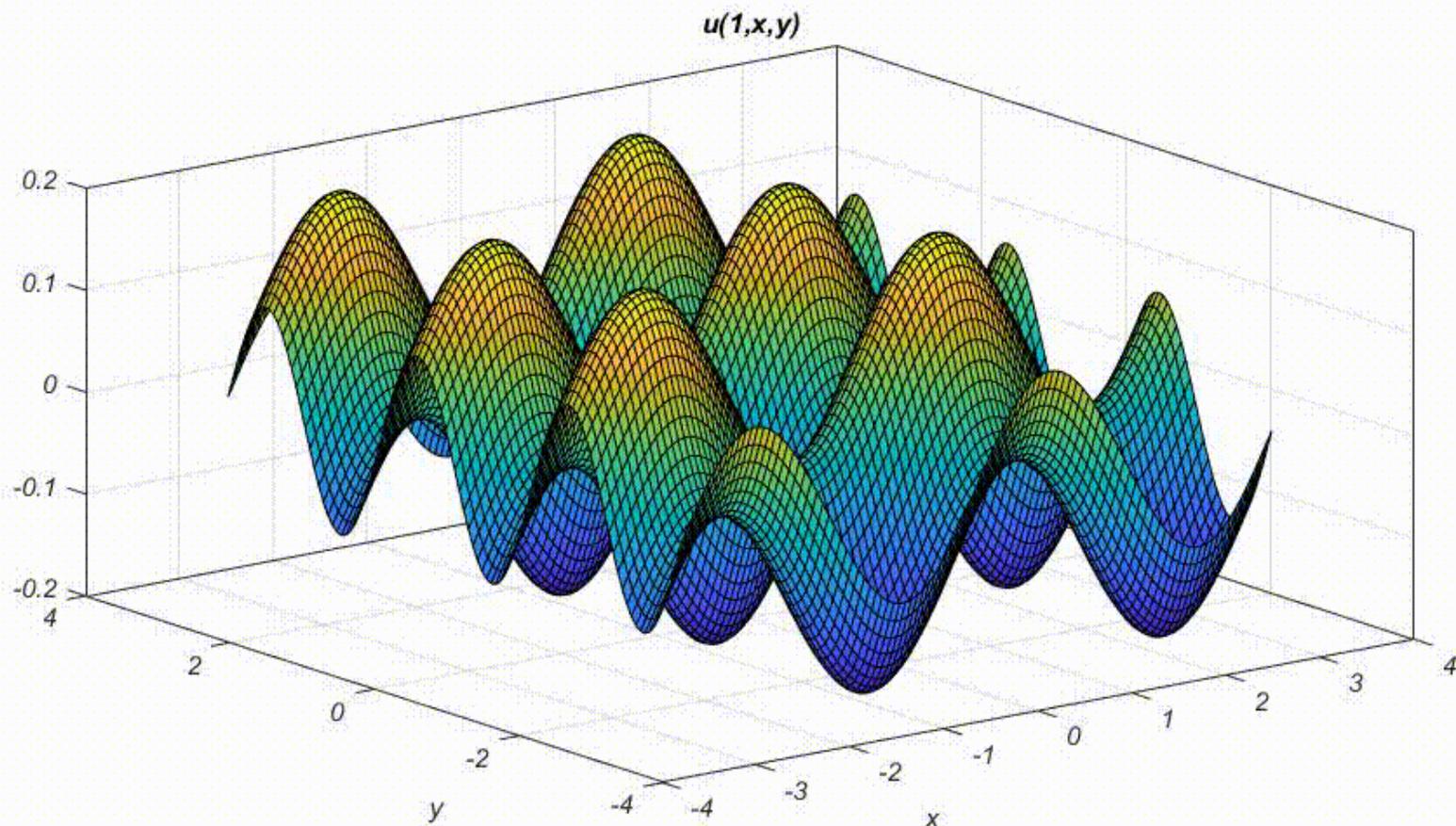
$$\varepsilon_{abs} = \pi^2 \sum_{k=K1+1}^{K2} [u_{k,1}^2(t) + u_{k,2}^2(t) + v_{k,1}^2(t) + v_{k,2}^2(t)]$$

$\frac{\varepsilon_{abs}}{E_{kin}}$ Эту погрешность можно трактовать как оценку «машинной» сходимости решения при разных $K1$, $K2$, или как оценку «интегральной» погрешности при счете с разными значениями $K1$, $K2$.

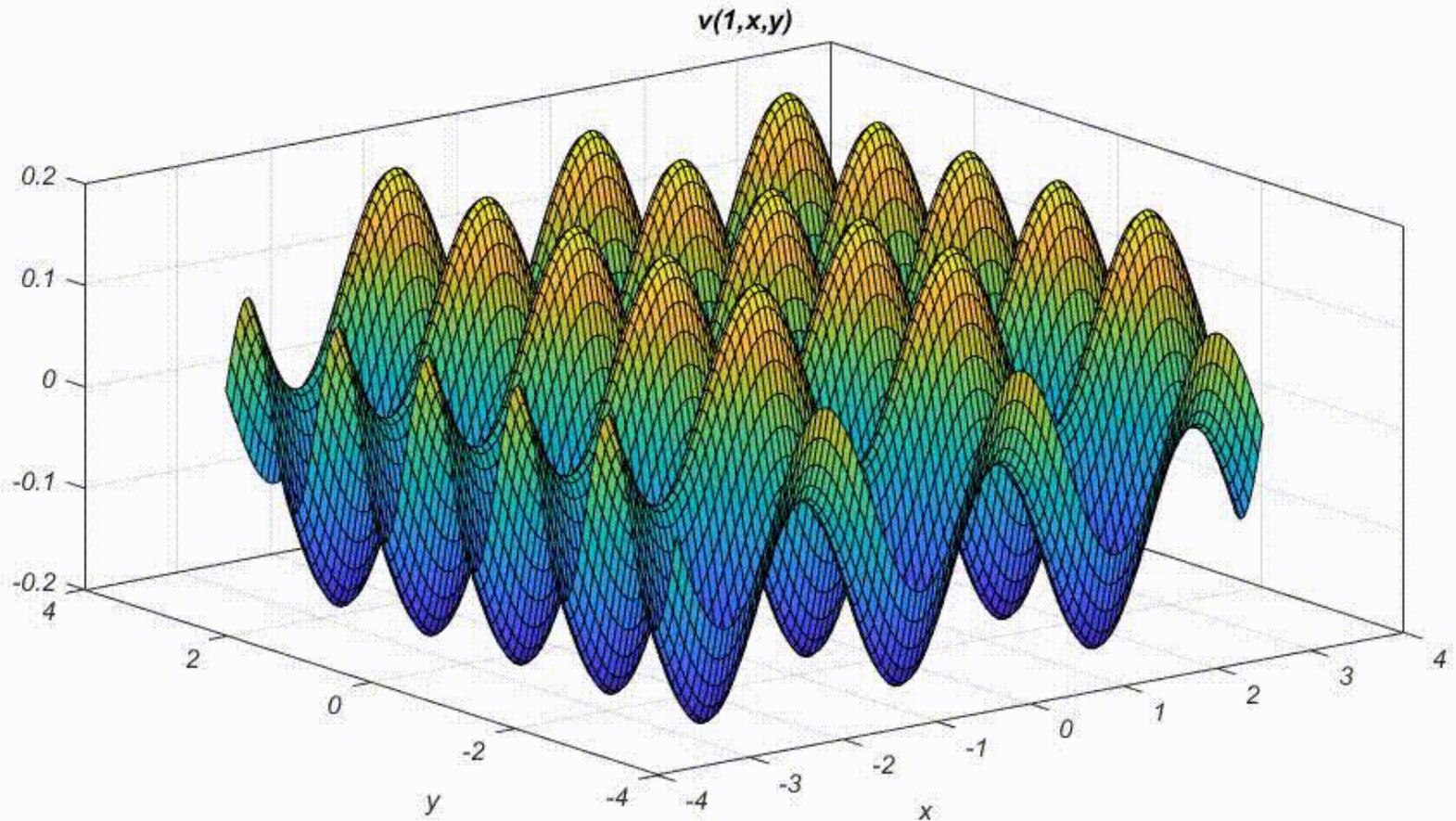
Результаты расчетов

t	$K2$	ε_{abs}	E_{kin}	$\varepsilon = \varepsilon_{abs}/E_{kin}$
100	700	0.078354	17.899665	0.004377
200	700	0.334541	29.758263	0.011241
300	700	0.072197	41.013134	0.001760
400	700	1.014130	47.915804	0.021164
500	700	1.505199	53.349249	0.028214

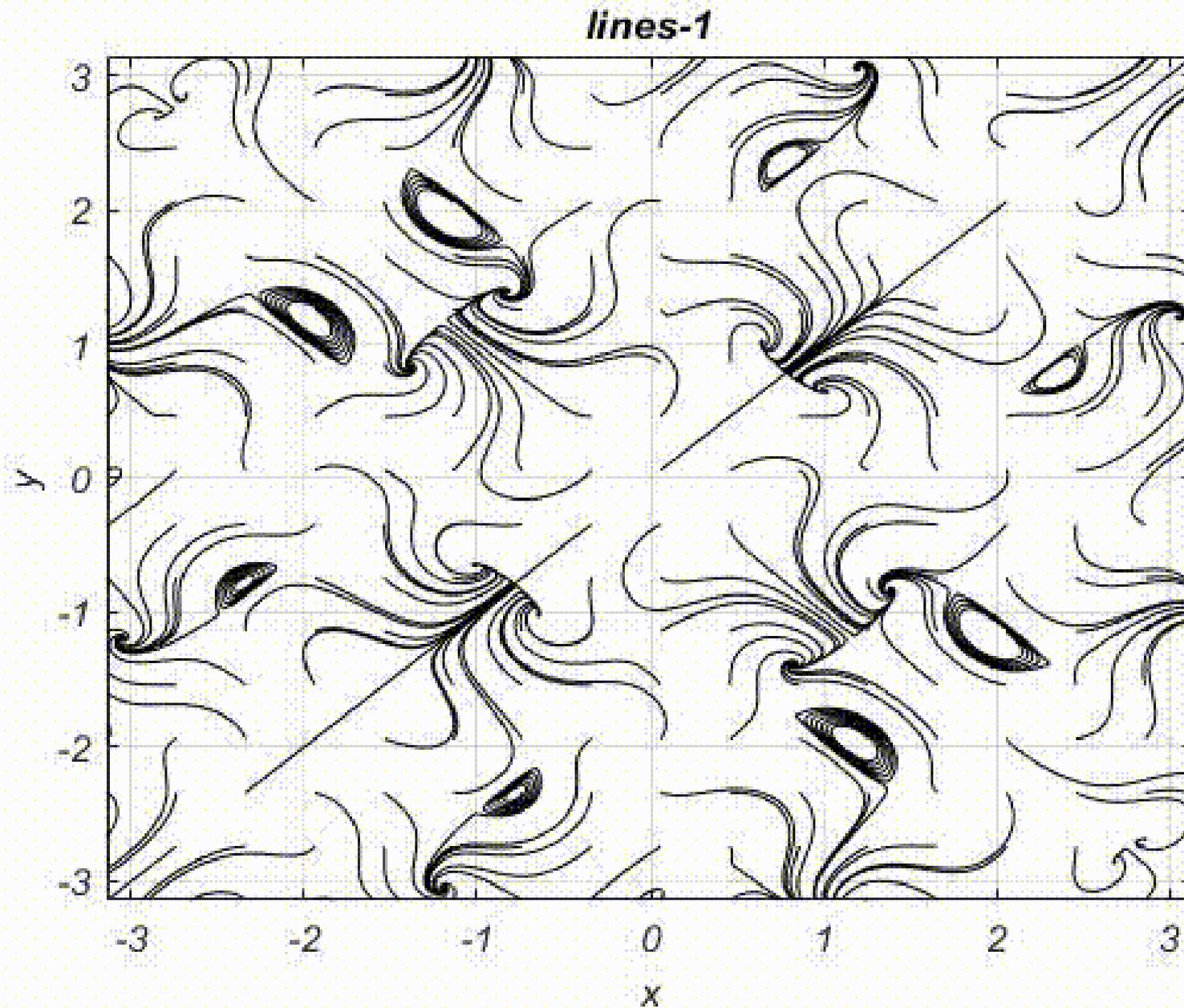
Поведение поверхности $u(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$

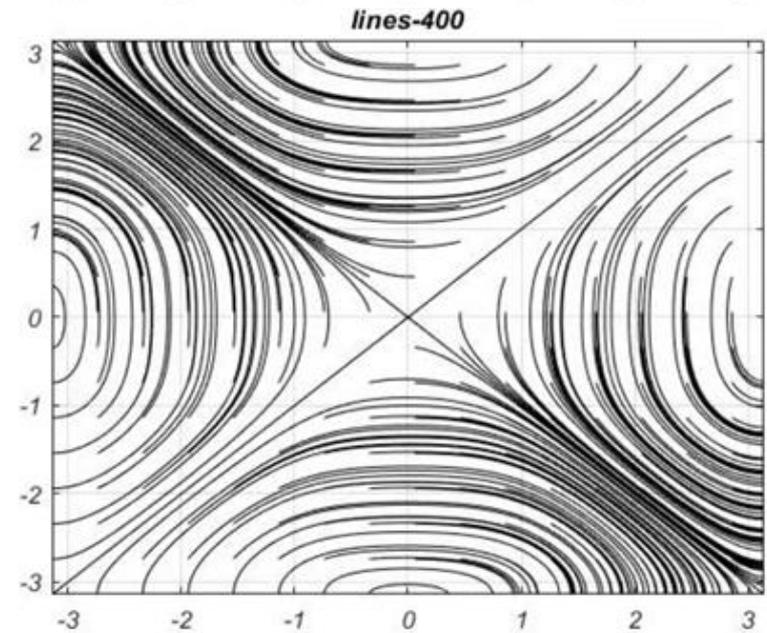
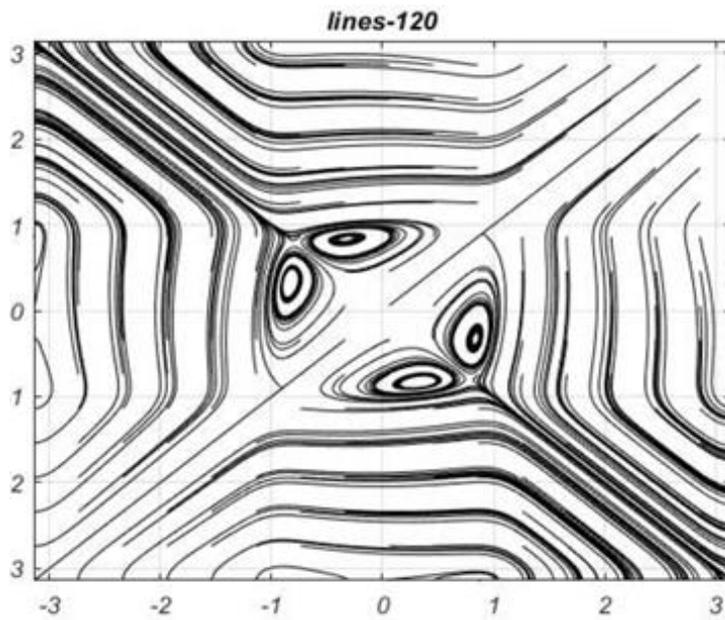
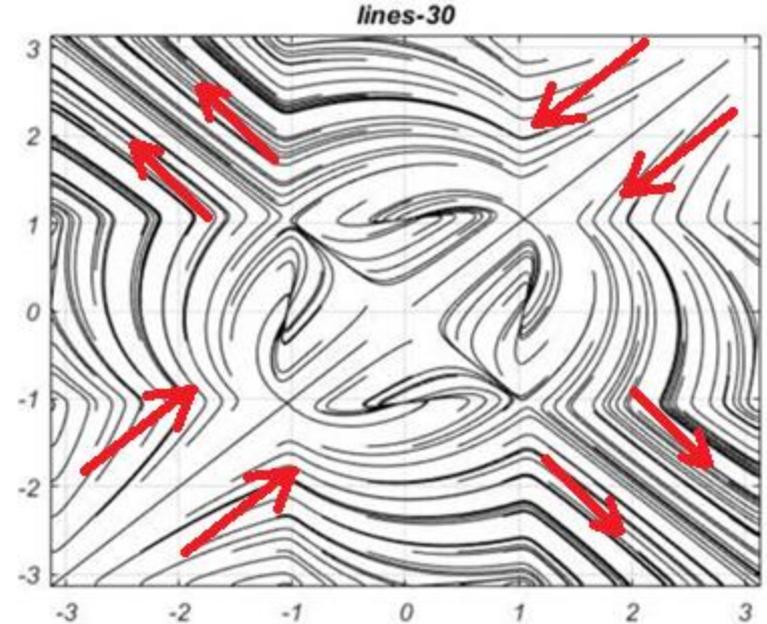
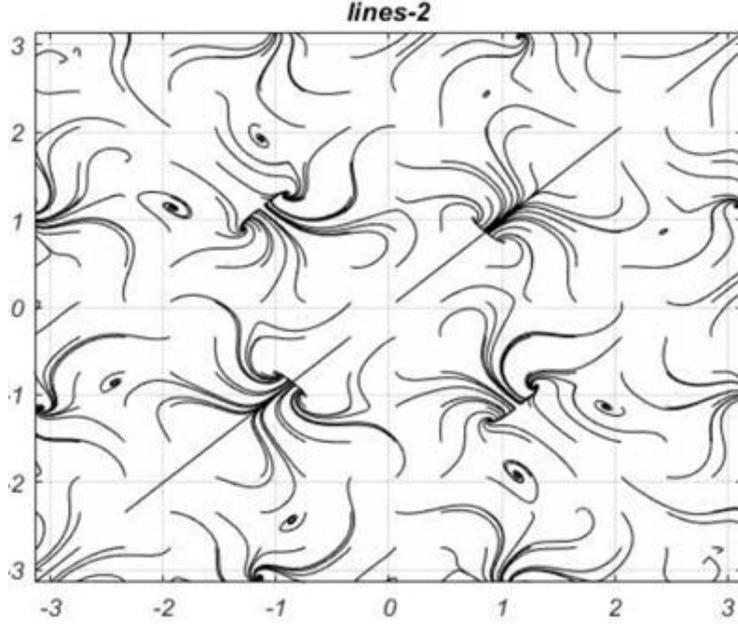


Поведение поверхности $v(t, x, y)$ при $0 \leq t \leq 200$



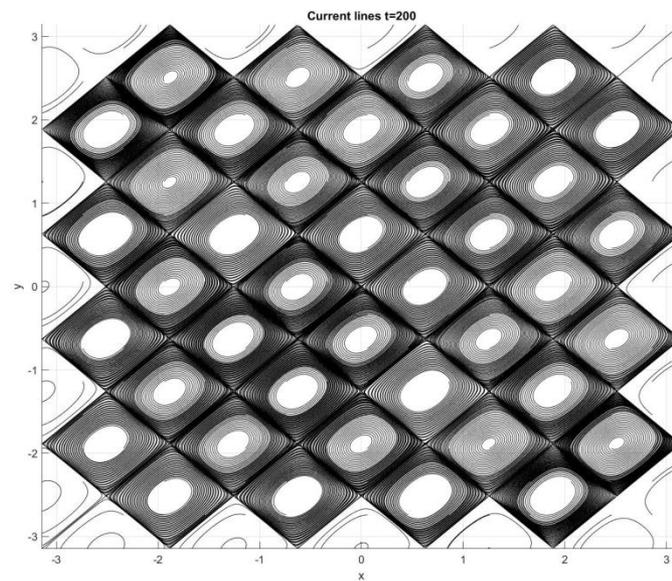
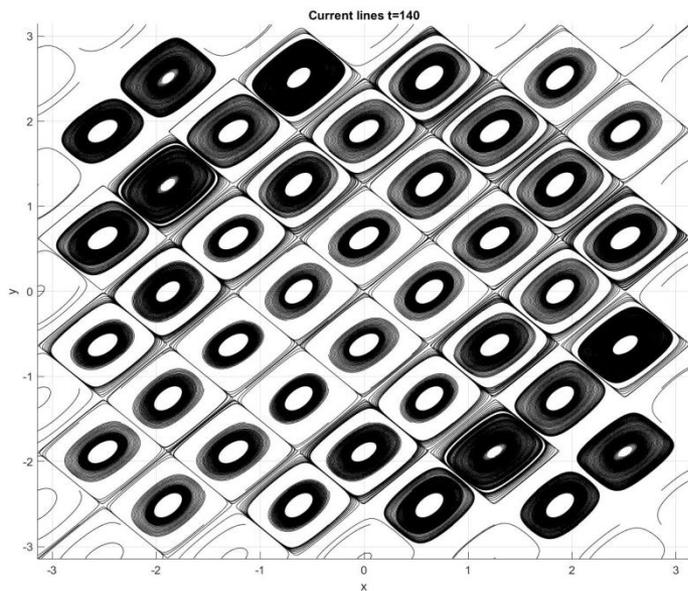
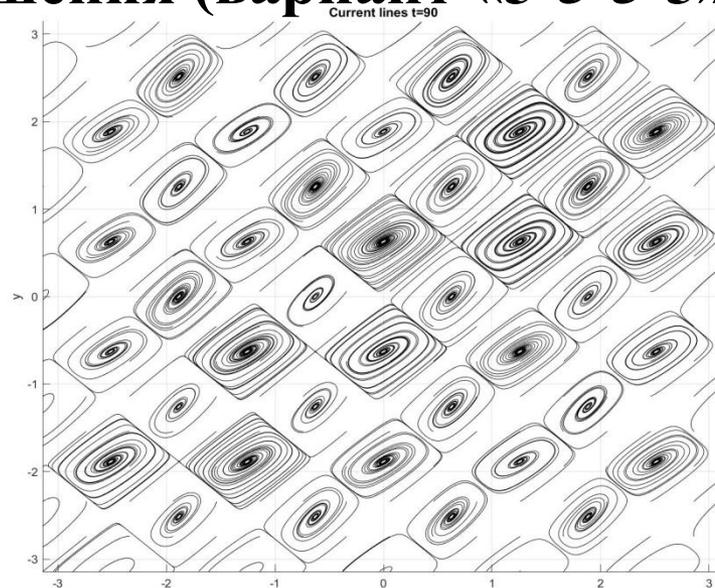
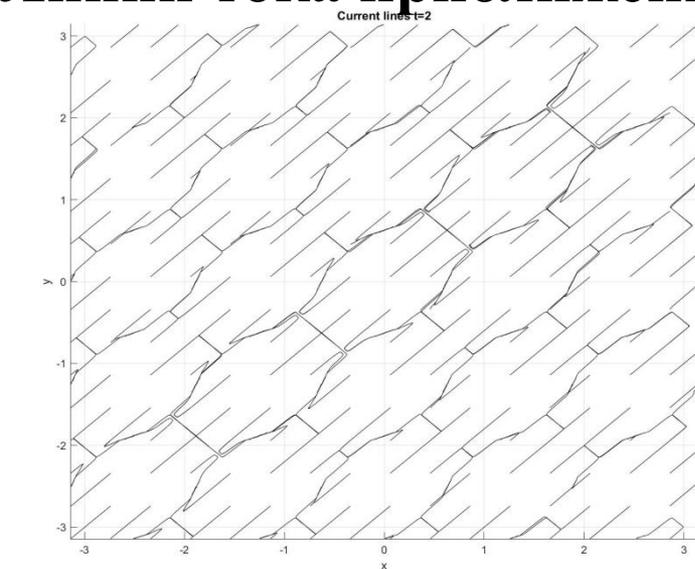
Поведение мгновенных линий тока при $0 \leq t \leq 1000$





Встречные потоки расходятся в разные стороны, образуя в центре четыре вихря, вращающиеся в соответствующие стороны - как шестеренки

Линии тока приближенного решения (вариант «5-5-5-5»)



Встречные потоки расходятся в разные стороны, образуя около 40 вихрей

Заключение

- Предложена методика представления двумерных нестационарных решений систем нелинейных уравнений с частными производными в виде тригонометрических рядов.
- Доказана локальная сходимость тригонометрических рядов.
- Построенные решения показывают «машинную» сходимость при больших значениях времени.
- В случае двумерных нестационарных течений доказаны новые теоремы о кратных частотах.
- Построенные с помощью конечных отрезков тригонометрических рядов приближенные решения моделируют сложные течения газа, близкие к турбулентным.
- Эти приближенные решения можно использовать как тестовые примеры для проверки методик расчетов разностными методами.

Спасибо за внимание !

spbautin@mail.ru

karelina-1999@inbox.ru

agobukhov@inbox.ru