ВНИИА
РОСАТОМ

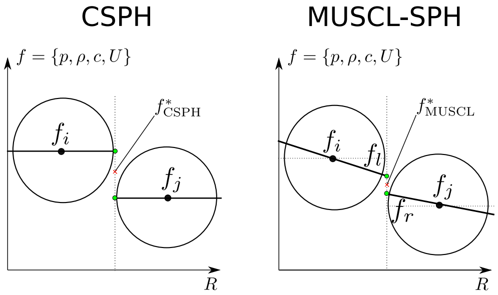
Повышение точности метода SPH типа Годунова путём линейной реконструкции значений на контакте частиц для моделирования вязких и упругопластических сред

ЗНЧ-2023

Рублев Георгий Дмитриевич, Паршиков А.Н., Дьячков С.А.

Цель работы

ВНИИА РОСАТОМ



$$f^*_{\mathrm{CSPH}} \neq f^*_{\mathrm{MUSCL}}$$

Цель работы – повысить точность контактного метода SPH (CSPH) путём замены кусочно-постоянной интерполяции величин на контакте кусочно-линейной, аналогично схеме MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws).

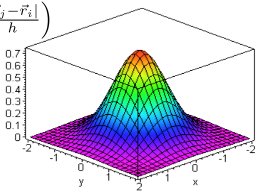
SPH
– Smoothed Particles Hydrodynamics

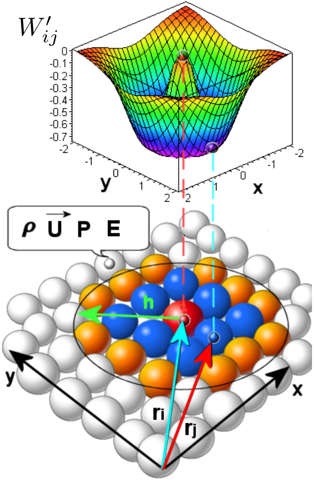
$$f(\vec{r}) = \int f(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{r})dv$$

$$f(\vec{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) W\left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{h}, h\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} f(\vec{r}_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{r}_j) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} W\left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{h}, h\right)$$

$W\left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{h}\right)$





$$h = \alpha(D_i + D_j)$$

1.

Основные уравнения и их SPH-аппроксимация

1.1. Основные уравнения

ВНИИА РОСАТОМ

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \overrightarrow{U} \qquad (1) \qquad \text{Закон сохранения массы}$$

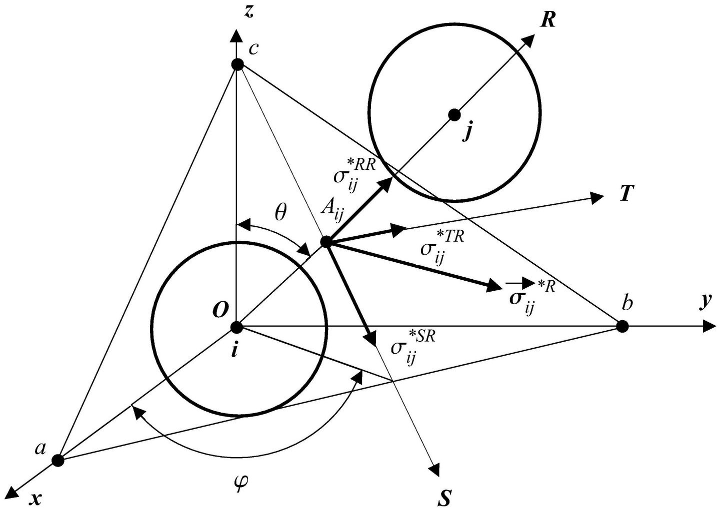
$$\rho\frac{d\overrightarrow{U}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\sigma} \qquad (2) \qquad \text{Закон сохранения импульса}$$

$$\rho\frac{dE}{dt} = \nabla \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \overrightarrow{U}\right) \qquad (3) \qquad \text{Закон сохранения энергии}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = -pI^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} + fS^{\alpha\beta}.$$

- Если $\tau^{\alpha\beta} = 0$ и $f = 0$ — получаем газ и невязкую сжимаемую жидкость.
- Если $f = 0$ — получаем вязкую сжимаемую жидкость.
- Если $f = 1$ — получаем сжимаемую вязкоупругую среду.
- Если $f = \min\left[\frac{Y_0^2}{\frac{3}{2}S^{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}}, 1\right]$ — получаем сжимаемую упругопластическую среду с вязкостью.

1.2. SPH-аппроксимация уравнений контактным методом SPH (CSPH)



1.2. SPH-аппроксимация уравнений контактным методом SPH (CSPH)

ВНИИА
РОСАТОМ

Исходные уравнения	SPH-аппроксимация
$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \overrightarrow{U}$	$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = -2\sum_j \frac{m_j}{\rho_j}\left[{U_i}^R - {U_{ij}}^{*R}\right]\overrightarrow{e^R} \cdot \nabla_i W_{ij}$
$\rho\frac{d\overrightarrow{U}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\sigma}$	$\frac{d\overrightarrow{U_i}}{dt} = -2\sum_j \frac{m_j}{\rho_j\rho_i}\Big[P^*_{ij} l^{R\alpha}\overrightarrow{e^\alpha} - (\tau + fS)^{\gamma R*}_{ij} l^{\gamma\alpha}\overrightarrow{e^\alpha}\Big]\overrightarrow{e^R} \cdot \nabla_i W_{ij}$
$\rho\frac{dE}{dt} = \nabla \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \overrightarrow{U}\right)$	$\frac{dE_i}{dt} = -2\sum_j \frac{m_j}{\rho_j\rho_i}\Big[P^*_{ij} U^{*R}_{ij} - (\tau + fS)^{\gamma R*}_{ij} U^{*\gamma}_{ij}\Big]\overrightarrow{e^R} \cdot \nabla_i W_{ij}$

$l^{\gamma\alpha}$ – направляющие косинусы, $\gamma = R, S, T$, $\alpha = x, y, z$.

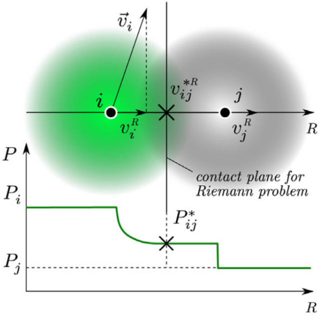
2. Моделирование сжимаемых вязких сред методом CSPH

2.1. Распад разрыва в сжимаемой жидкой среде. Акустическое приближение

Давление и скорость в точке контакта SPH-частиц в акустическом приближении вычисляются как

$$P^*_{ij} = \frac{P_j \rho_i C_i + P_i \rho_j C_j - \rho_i C_i \rho_j C_j (U_j^R - U_i^R)}{\rho_i C_i + \rho_j C_j}, \quad (4)$$

$$U^{*R}_{ij} = \frac{U_i^R \rho_i C_i + U_j^R \rho_j C_j - P_j + P_i}{\rho_i C_i + \rho_j C_j}. \quad (5)$$



2.2. Схема взаимодействия SPH-частиц в вязкой среде

ВНИИА РОСАТОМ

Компоненты вектора вязких напряжений приписываются к точке контакта A_{ij}:

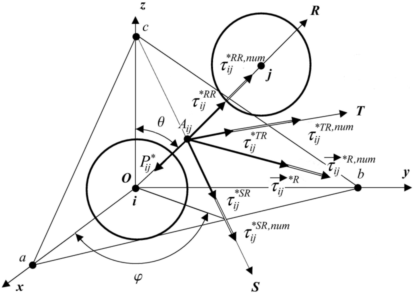
$$\tau_{ij}^{RR*} = \frac{4}{3}\eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i+\eta_j\sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^R-U_i^R}{|\overrightarrow{r_j}-\overrightarrow{r_i}|},$$

$$\tau_{ij}^{SR*} = \eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i+\eta_j\sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^S-U_i^S}{|\overrightarrow{r_j}-\overrightarrow{r_i}|},$$

$$\tau_{ij}^{TR*} = \eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i+\eta_j\sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^T-U_i^T}{|\overrightarrow{r_j}-\overrightarrow{r_i}|}.$$

Компоненты скорости в точке вязкого контакта:

$$U_{ij}^{\gamma*} = \frac{\eta_i U_i^\gamma+\eta_j U_j^\gamma\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i+\eta_j\sqrt{\nu_i/\nu_j}},\ \gamma = R,S,T.$$



Компоненты напряжений при вязком распаде между частицами.

3. Моделирование вязкоупругих сред методом SPH

3.1. SPH-аппроксимация уравнений для упругой среды

ВНИИА
РОСАТОМ

$$\sigma^{\alpha\beta} = -PI^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta},$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 2G\left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma}\right) + \underbrace{S^{\alpha\gamma}\Omega^{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha\gamma}S^{\gamma\beta}}_{\text{вращение}}.$$

Контактные значения продольных компонент скорости и напряжения в акустическом приближении имеют вид:

$$U_{ij}^{*R} = \frac{U_i^R\rho_i C_i^l + U_j^R\rho_j C_j^l + \sigma_j^{RR} - \sigma_i^{RR}}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}, \tag{6}$$

$$\sigma_{ij}^{RR*} = \frac{\sigma_j^{RR}\rho_i C_i^l + \sigma_i^{RR}\rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l \rho_j C_j^l (U_j^R - U_i^R)}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}. \tag{7}$$

3.1. SPH-аппроксимация уравнений для упругой среды

А для поперечных компонент имеем:

$$U_{ij}^{*S} = \frac{U_i^S \rho_i C_i^l + U_j^S \rho_j C_j^l + \sigma_j^{SR} - \sigma_i^{SR}}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}, \tag{8}$$

$$\sigma_{ij}^{SR*} = \frac{\sigma_j^{SR} \rho_i C_i^l + \sigma_i^{SR} \rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l \rho_j C_j^l (U_j^S - U_i^S)}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}, \tag{9}$$

$$U_{ij}^{*T} = \frac{U_i^T \rho_i C_i^l + U_j^T \rho_j C_j^l + \sigma_j^{TR} - \sigma_i^{TR}}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}, \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}^{TR*} = \frac{\sigma_j^{TR} \rho_i C_i^l + \sigma_i^{TR} \rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l \rho_j C_j^l (U_j^T - U_i^T)}{\rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l}. \tag{11}$$

4.

MUSCL-SPH
(повышение точности метода)

4. MUSCL-SPH

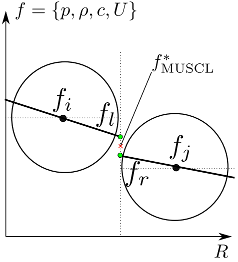
Идея метода MUSCL-SPH заключается в использовании в формулах (4)-(5) (либо (6)-(11)) вместо значений в i-й и j-й частицах их линейной интерполяции на точку межчастичного контакта слева и справа от плоскости контакта. SPH-аппроксимация градиентов физических величин имеет вид:

$$\nabla\Phi_i = \sum_j (\Phi_j - \Phi_i)\nabla_i W_{ij}\frac{m_j}{\rho_j}.$$

Значения справа и слева от контакта:

$$\Phi_l = \Phi_i + \frac{1}{2}\delta\Phi_i,$$

$$\Phi_r = \Phi_j - \frac{1}{2}\delta\Phi_j.$$



Величины $\delta\Phi_i$ и $\delta\Phi_j$ определяются как:

$$\delta\Phi_i = \mathrm{minmod}(\Phi_j - \Phi_i, \nabla\Phi_i\cdot\overrightarrow{r_{ji}}),$$

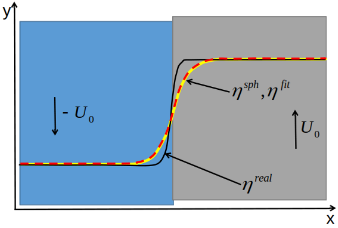
$$\delta\Phi_j = \mathrm{minmod}(\nabla\Phi_j\cdot\overrightarrow{r_{ji}}, \Phi_j - \Phi_i).$$

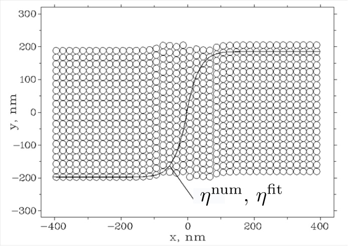
5.
Схемная вязкость метода

5.1. Схемная вязкость метода

При моделировании методом SPH схемная вязкость проявляет себя идентично физической вязкости, что следует из сравнения профилей скорости, полученных при моделировании, и из аналитического решения[1], описывающего распределение скорости в вязком потоке ($\eta^{\mathrm{num}} = \eta^{\mathrm{fit}}$):

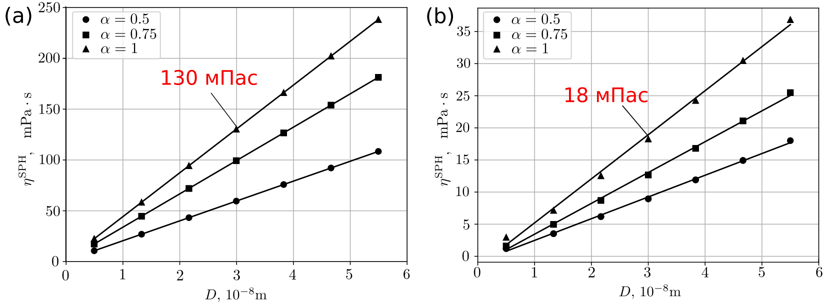
$$U_y(x,t) = U_y(x,0)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t\eta/\rho}}\right)$$





[1] H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1932

5.1. Схемная вязкость метода



Зависимость схемной вязкости жидкого свинца от размера частиц при различных значениях параметра сглаживающей длины α ($h_{ij} = \alpha(D_i + D_j)$): (a) метод CSPH, (b) MUSCL-SPH

Схемная вязкость метода MUSCL-SPH в данном тесте оказалась примерно в 6-7 раз ниже.

5.2. Управление вязкостью метода

$$U_{ij}^{\gamma*} = \frac{\eta_i U_i^\gamma + \eta_j U_j^\gamma \sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i + \eta_j \sqrt{\nu_i/\nu_j}} - \zeta U_{ij}^{\gamma*,\mathrm{num}}$$

$$\tau_{ij}^{RR*} = \frac{4}{3}\eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i + \eta_j \sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^R - U_i^R}{|\vec{r_j} - \vec{r_i}|} - \zeta \tau_{ij}^{RR*,\mathrm{num}}$$

$$\tau_{ij}^{SR*} = \eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i + \eta_j \sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^S - U_i^S}{|\vec{r_j} - \vec{r_i}|} - \zeta \tau_{ij}^{SR*,\mathrm{num}}$$

$$\tau_{ij}^{TR*} = \eta_i\eta_j \frac{1+\sqrt{\nu_i/\nu_j}}{\eta_i + \eta_j \sqrt{\nu_i/\nu_j}} \frac{U_j^T - U_i^T}{|\vec{r_j} - \vec{r_i}|} - \zeta \tau_{ij}^{TR*,\mathrm{num}}$$

Физическая вязкость

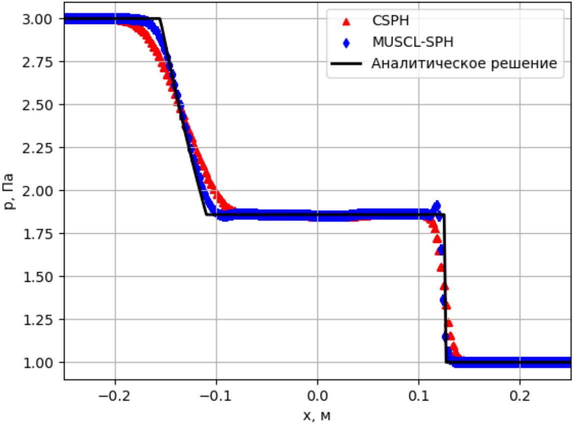
Компенсация схемной вязкости

$\zeta \in [0, 1]$ – степень корректировки.

6. Результаты тестовых расчётов

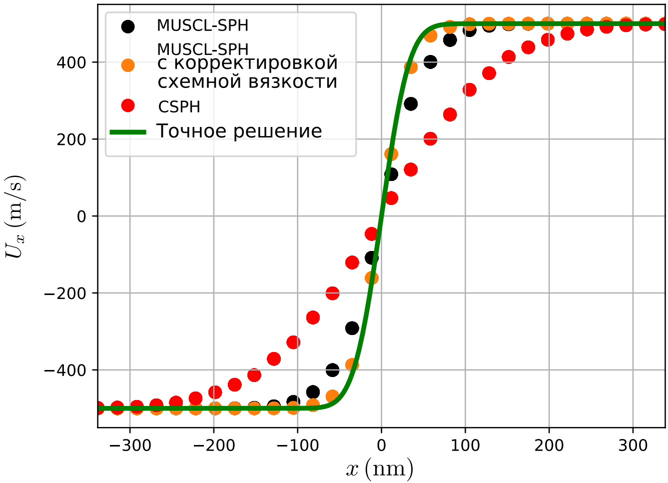
6.1. Распад разрыва в газе

ВНИИА
РОСАТОМ



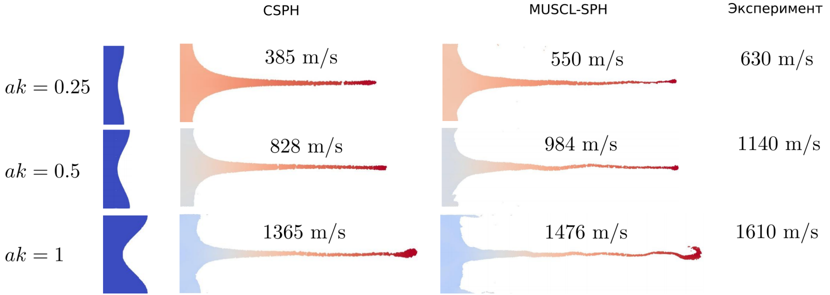
Сравнение профилей давления в задаче о распаде разрыва в идеальном газе, полученных методом CSPH и методом MUSCL-SPH, с аналитическим решением.

6.2. Диффузия вязкого разрыва в однородной жидкости



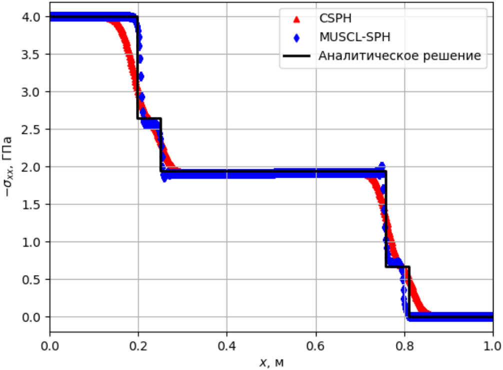
Диффузия вязкого разрыва в жидком уране при $t = 1$ нс.

6.3. Моделирование кумулятивных струй



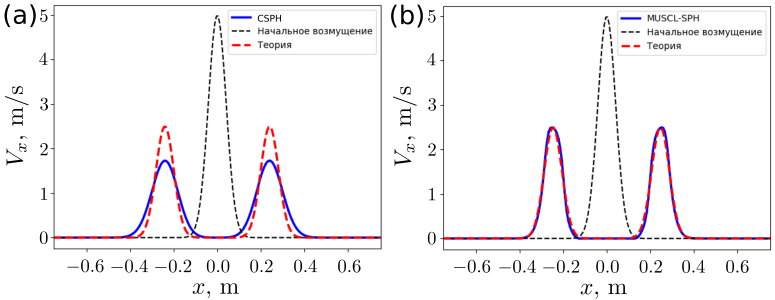
Моделирование процесса пыления гофрированной свободной поверхности (олово). Экспериментальные данные взяты из работы Buttler W.T. et al. Unstable Richtmyer–Meshkov growth of solid and liquid metals in vacuum // J. Fluid Mech. — Vol. 703. — P. 60–84. — 2012.

6.4. Распад разрыва в упругопластической среде



Сравнение профилей компоненты тензора напряжений σ_{xx} в задаче о распаде разрыва в упругопластической среде (алюминий), расчитанных методом CSPH и методом MUSCL-SPH с аналитическим решением.

6.5. Распространение звуковой волны в упругой среде



Моделирование распространения продольной звуковой волны в алюминии: (a) методом CSPH, (b) методом MUSCL-SPH.

7. Использование матрицы нормализации при расчёте тензора скоростей деформаций

7.1. Нормализация при расчёте тензора скоростей деформаций

ВНИИА
РОСАТОМ

Рассмотрим следующую SPH-сумму:

$$\sum_j \tilde{U}^{\alpha}_{ij} \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j},$$

где $\tilde{U}^{\alpha}_{ij}$ – значение α-компоненты скорости в точке по середине между центрами частиц i и j. Подставляя вместо $\tilde{U}^{\alpha}_{ij}$ разложение в ряд Тейлора с центром в точке i получаем:

$$\nabla U^{\alpha}_i = \sum_j 2(\tilde{U}^{\alpha}_{ij} - U^{\alpha}_i)\mathbb{L}_i \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j},$$

7.1. Нормализация при расчёте тензора скоростей деформаций

ВНИИА
РОСАТОМ

где

$$\mathbb{L}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \begin{pmatrix} (r_j^x - r_i^x)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial x} & (r_j^y - r_i^y)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial x} & (r_j^z - r_i^z)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial x} \\ (r_j^x - r_i^x)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial y} & (r_j^y - r_i^y)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial y} & (r_j^z - r_i^z)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial y} \\ (r_j^x - r_i^x)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial z} & (r_j^y - r_i^y)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial z} & (r_j^z - r_i^z)\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

В качестве оценки $\tilde{U}_{ij}^{\alpha}$ будем использовать распадное значение скорости $U_{ij}^{*\alpha}$:

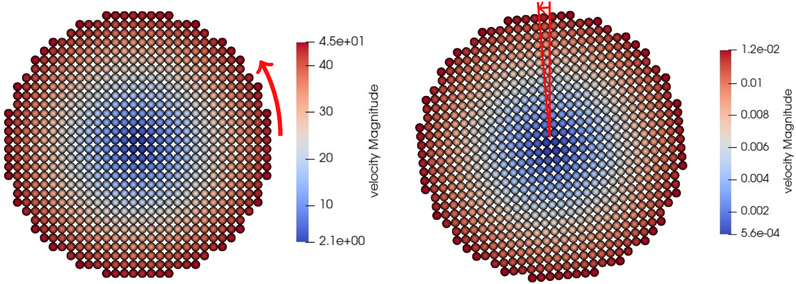
$$\nabla U_i^{\alpha} = \sum_j 2(U_{ij}^{*\alpha} - U_i^{\alpha})\mathbb{L}_i \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j},$$

Полученные таким образом производные компонент скорости по координатам будем использовать для расчёта тензора скоростей деформаций.

7.2. Вращение упругого цилиндра (2D)

ВНИИА
РОСАТОМ

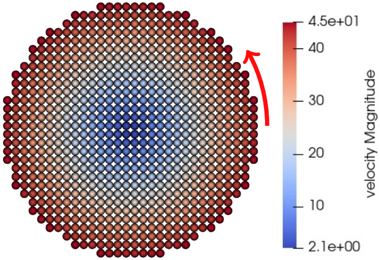
$\varphi = 0$ $\qquad$ $\varphi = 0.029357\pi$ (остановка)



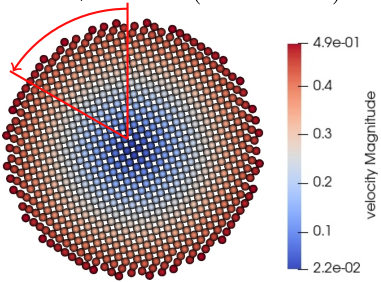
Вращение алюминиевого цилиндра радиусом 1.5 м с начальной скоростью вращения 30 рад/с. Метод CSPH.

7.2. Вращение упругого цилиндра (2D)

$\varphi = 0$

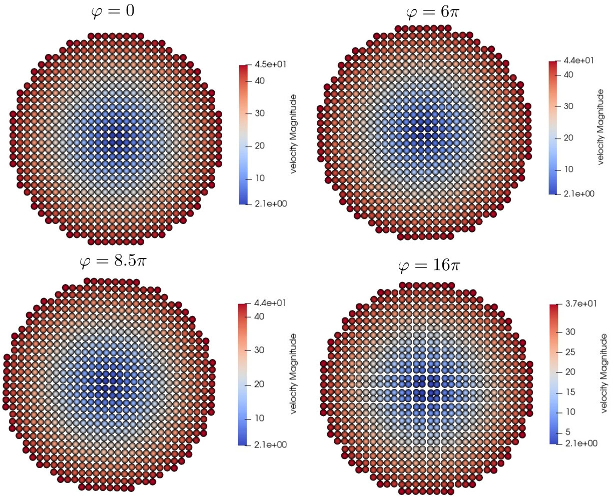


$\varphi = 0.3158\pi$ (остановка)



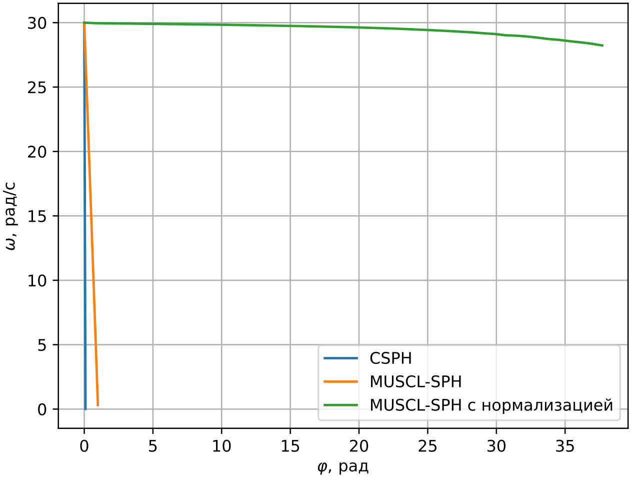
Вращение алюминиевого цилиндра радиусом 1.5 м с начальной скоростью вращения 30 рад/с. Метод MUSCL-SPH без нормализации скоростей деформации.

7.2. Вращение упругого цилиндра (2D)



Вращение алюминиевого цилиндра радиусом 1.5 м с начальной скоростью вращения 30 рад/с. Метод MUSCL-SPH с нормализацией скоростей деформаций.

7.2. Вращение упругого цилиндра (2D)



Зависимость угловой скорости от угла поворота.

Спасибо за внимание

Рублев Георгий Дмитриевич, Паршиков А.Н., Дьячков С.А.

E-mail: rublev_gd_97@vk.com

30.05.2023