



# **МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ ХОЛОДНОЙ И ТЕПЛОВОЙ ЧАСТЕЙ ДАВЛЕНИЯ**

Кривошеина М.Н., Туч Е.В. (ИФПМ СО РАН)

Цель – создание математической модели для моделирования процессов деформирования материалов, характеризующихся анизотропией упругих, пластических свойств, упрочнения, разрушения, а также процесса деформирования разрушенного материала.

В рамках механики деформируемого твердого тела решается система уравнений: закон сохранения массы, закон сохранения импульсов, закон сохранения энергии в рамках безмоментной теории упругости.

### Упругие деформации анизотропных материалов.

- Используется обобщенный закон Гука, записанный через компоненты тензоров полных напряжений и деформаций.
- Известны модели для статического и динамического нагружения, позволяющие исследовать процессы деформирования при любой симметрии свойств и в ауксетиках.
- Класс материалов: композиционные материалы с усредненными механическими характеристиками, композиционные стеклопластики, органопластики, углепластики, фанера, ауксетики, метаматериалы, геоматериалы, биоткани.
- Распространение упругих волн в геоматериалах, моделирование волновой картины деформирования, изменяющей время и место локализации разрушения из-за зависимости скоростей распространения упругих волн от направления.

# Модель упругопластического деформирования анизотропных материалов

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0;$$

-уравнение неразрывности

$$\rho \frac{dv^k}{dt} = \frac{\partial \sigma^{ki}}{\partial x_i} + F^k;$$

-уравнения движения сплошной среды

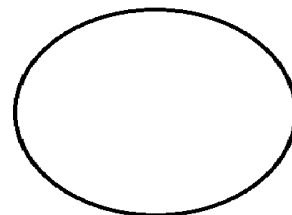
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} e_{ij}.$$

-уравнение энергии

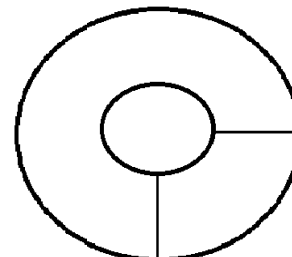
$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i); \quad i, j = 1, 2, 3.$$

-компоненты тензора скоростей деформации.

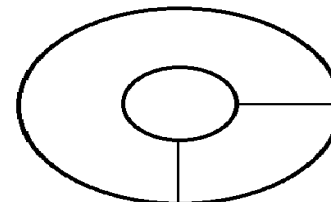
Наступление пластической деформации определяется условием достижения вторым инвариантом девиатора напряжений предельного значения или достижением энергии, которая требуется для изменения формы, предельной величины.



$$\sigma_{ij}$$



$\sigma_{ij} = -P_0 \delta_{ij} + S_{ij}$   
модуль объемного сжатия, отвечает  
объемно изотропному материалу;



$\sigma_{ij} = -P_0 \lambda_{ij} + S_{ij}$   
модули линейного сжатия

$$\sigma_{ij} = -P_0 \lambda_{ij} + S_{ij} \quad \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} = 3$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} / 3 + e_{ij} \quad \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = -P_0 \lambda_{ij} \delta_{ij} + S_{ij} \delta_{ij} \quad \text{т. к.} \quad \lambda_{ij} \delta_{ij} = 3 \quad -3P_0 = -3P_0 + S_{ij} \delta_{ij}$$

$$W = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = (-P_0 \lambda_{ij} + S_{ij})(\varepsilon_0 \delta_{ij} / 3 + e_{ij})$$

85% + 15%

при динамическом нагружении

Возможность разделения энергии упругой деформации на энергию изменения объема и энергию изменения формы определяется заполненностью матрицы упругих постоянных (для статических и динамических нагружений):

- Обобщенный закон Гука и вид матрицы упругих постоянных в общем случае анизотропии

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} C_{11} &= \rho v_{l,11}^2 \\ C_{44} &= \rho v_{S,23}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

$$K = (C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{12} + C_{22} + C_{32} + C_{13} + C_{23} + C_{33}) / 9$$

$$K_1 = (C_{11} + C_{21} + C_{31}) / 3$$

$$K_2 = (C_{12} + C_{22} + C_{32}) / 3$$

$$K_3 = (C_{13} + C_{23} + C_{33}) / 3$$

$$K \lambda_{ii} = (C_{i1} + C_{i2} + C_{i3}) / 3$$

$$\lambda_{ii} = (C_{i1} + C_{i2} + C_{i3}) / 3K$$

Доля линейной сжимаемости

в объемной сжимаемости

Введение **анизотропного давления** влечет изменение разностной схемы в областях моделирования:

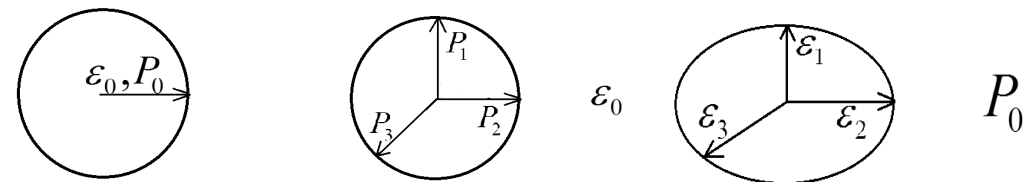
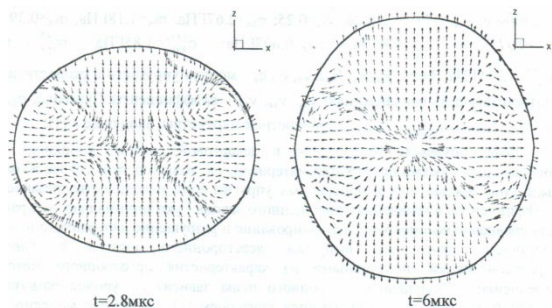
упругих деформаций, перехода от упругих деформаций к пластическим, в области пластических деформаций и упрочнения, в области процесса разрушения и деформаций разрушенного материала (при условии разрушения в условиях сжатия). Как следствие - скорости распространения пластических волн сжатия или растяжения зависят от направления распространения. **Анизотропное давление** обеспечивает безопасное состояние анизотропного материала.

**наличие в матрице упругих постоянных коэффициентов взаимного влияния первого и второго рода (по А.Л. Рабиновичу):**

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} (C_{11} + C_{12} + 2 C_{44}) & \frac{1}{3} (C_{11} + 2 C_{12} - 2 C_{44}) & \frac{1}{6} (C_{11} + 5 C_{12} - 2 C_{44}) & 0 & 0 & \frac{-C_{11} + C_{12} + 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} (C_{11} + 2 C_{12} - 2 C_{44}) & \frac{1}{3} (C_{11} + 2 C_{12} + 4 C_{44}) & \frac{1}{3} (C_{11} + 2 C_{12} - 2 C_{44}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} (C_{11} + 5 C_{12} - 2 C_{44}) & \frac{1}{3} (C_{11} + 2 C_{12} - 2 C_{44}) & \frac{1}{2} (C_{11} + C_{12} + 2 C_{44}) & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12} - 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} (C_{11} - C_{12} + C_{44}) & \frac{C_{11} - C_{12} - 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12} - 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} & \frac{1}{6} (C_{11} - C_{12} + 4 C_{44}) & 0 \\ \frac{-C_{11} + C_{12} + 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} & 0 & \frac{C_{11} - C_{12} - 2 C_{44}}{3 \sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{3} (C_{11} - C_{12} + C_{44}) \end{pmatrix}$$

# Пластическая деформация в материалах, характеризующихся анизотропией упругих и пластических свойств

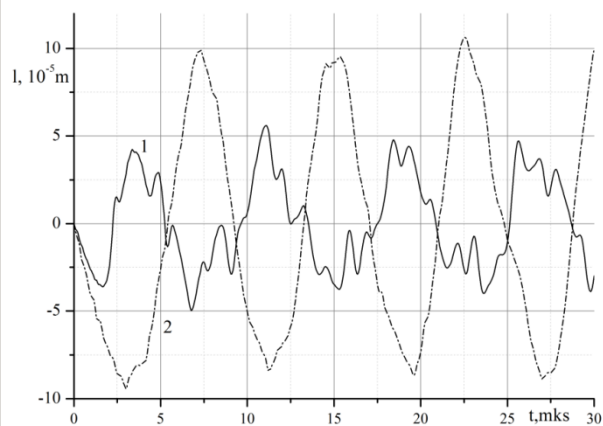
Необходимо разложить тензоры полных напряжений и полных деформаций на шаровые и девиторные части для проверки условия текучести и для реализации соотношений, связанных с изменениями объема и формы. Действие импульса 3мкс.



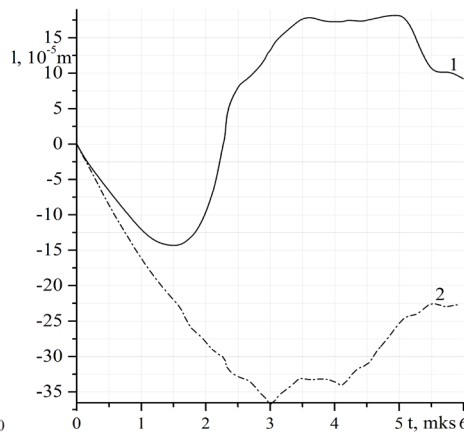
Упругие постоянные ГПУ-монокристаллического цинка:  
 $C_{11}=C_{22}=161, C_{33}=61, C_{12}=35, C_{13}=50, C_{44}=38; C_{66}=63$  ГПа (2.64), (1.625)  
 Технические постоянные:  
 $K_1=K_2=82, K_3=54$  ГПа – модули объемного сжатия (1.52), (1.234)  
 $E_{11}=E_{22}=120, E_{33}=35$  ГПа, модули Юнга (3.43), (1.85)  
 0.25, - 0.056, 0.86 – коэффициенты Пуассона  
 $\lambda_{11} = 1.13, \lambda_{22} = 1.13, \lambda_{33} = 0.74, \lambda_{11} / \lambda_{33} = 1.527.$

Кривошеина М.Н., Радченко А.В., Кобенко С.В. Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия// МКМК, №1, 2001 с. 95-102

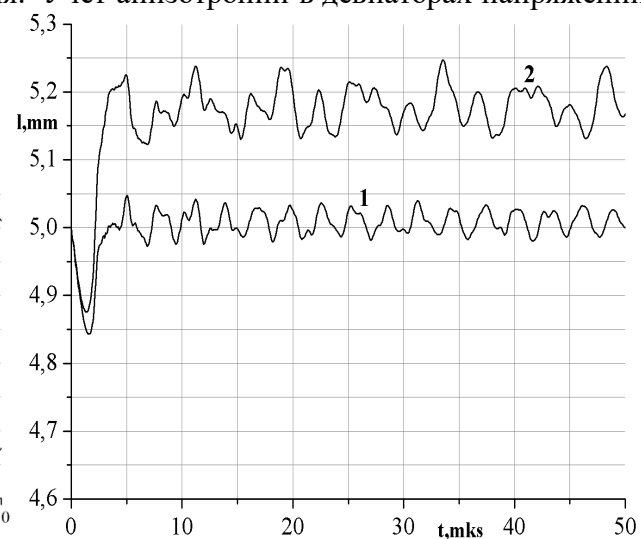
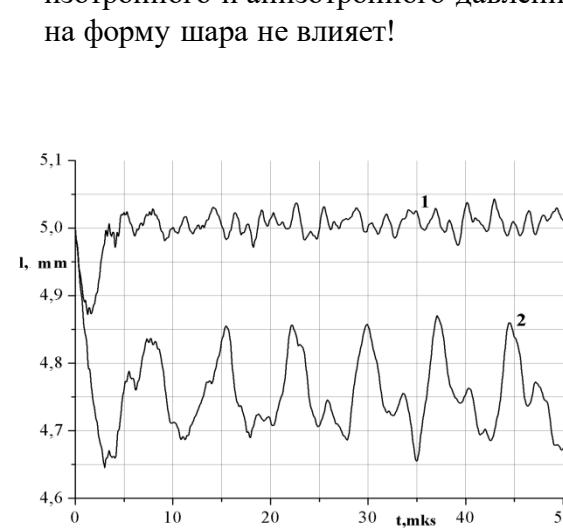
Изменение радиусов шара из монокристаллического цинка от исходного положения при упругой деформации



Изменение радиусов шара при упругопластической деформации – аналогично статическому нагружению.



Изменение радиусов шаров при упругопластическом деформировании. Реализация изотропного и анизотропного давления. Учет анизотропии в деваторах напряжений на форму шара не влияет!



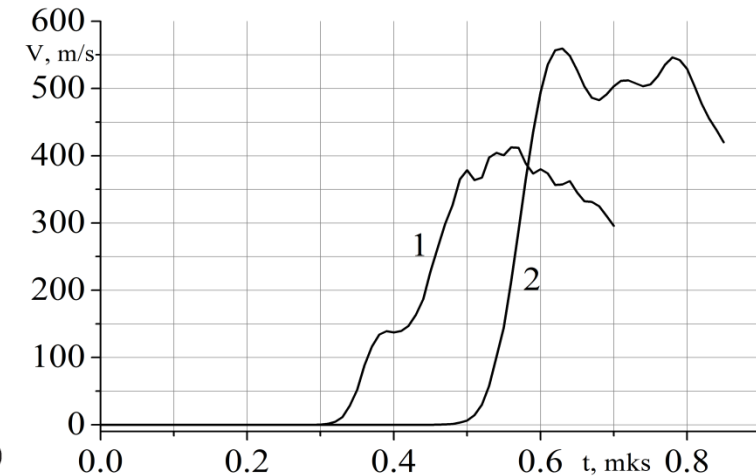
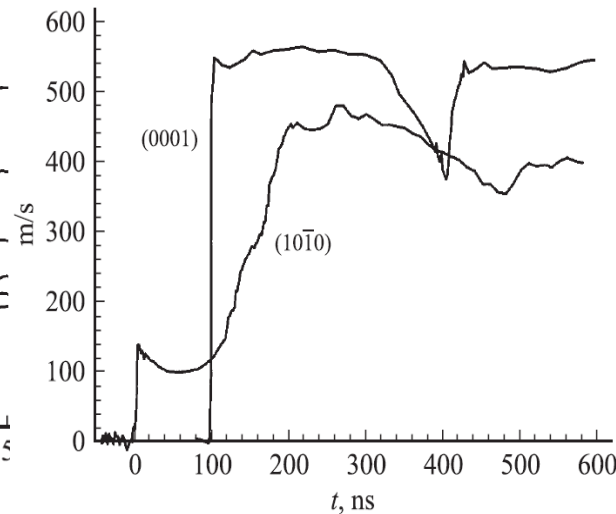
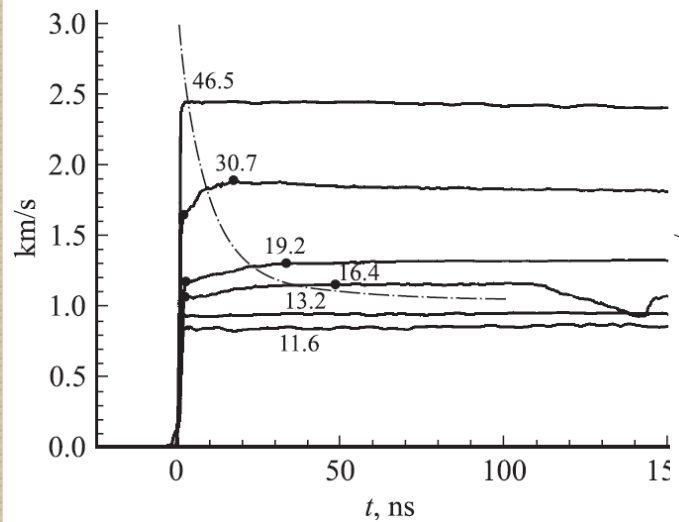
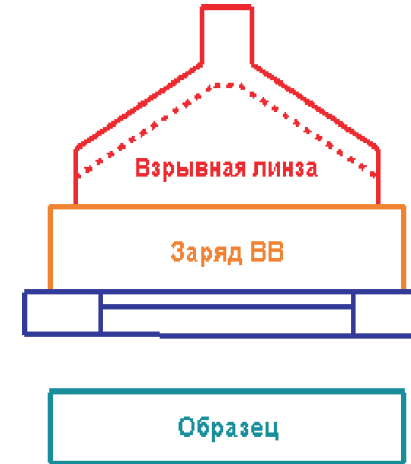
## Распространение волн сжатия и растяжения в монокристаллах цинка

Скорость продольных упругих волн  
при одномерной деформации

$$c_l = \sqrt{\frac{K + 4/3 G}{\rho}}$$

Скорость пластических волн сжатия  
при одномерной деформации

$$c_b = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$



Скорости упругих волн цинка:  $C_{l,33}=2980$  м/с,  $C_{l,11}=C_{l,22}=4730$  м/с,

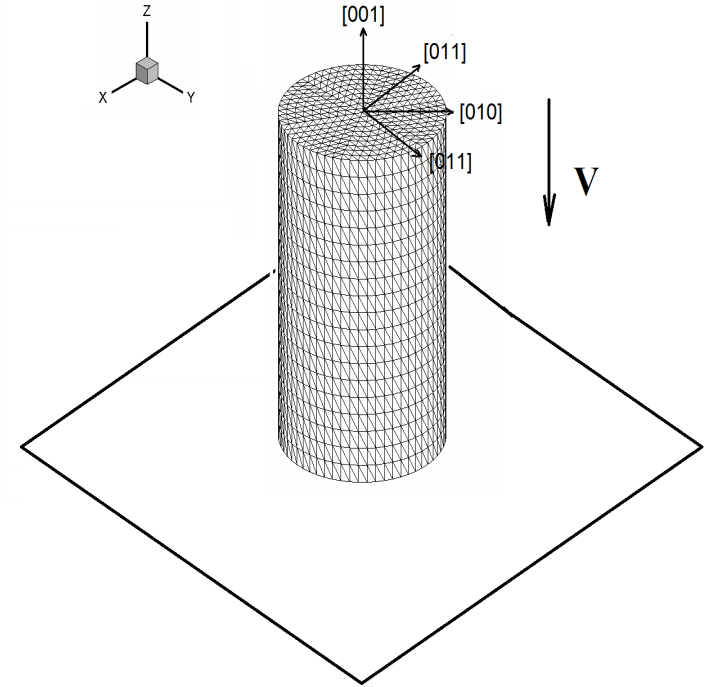
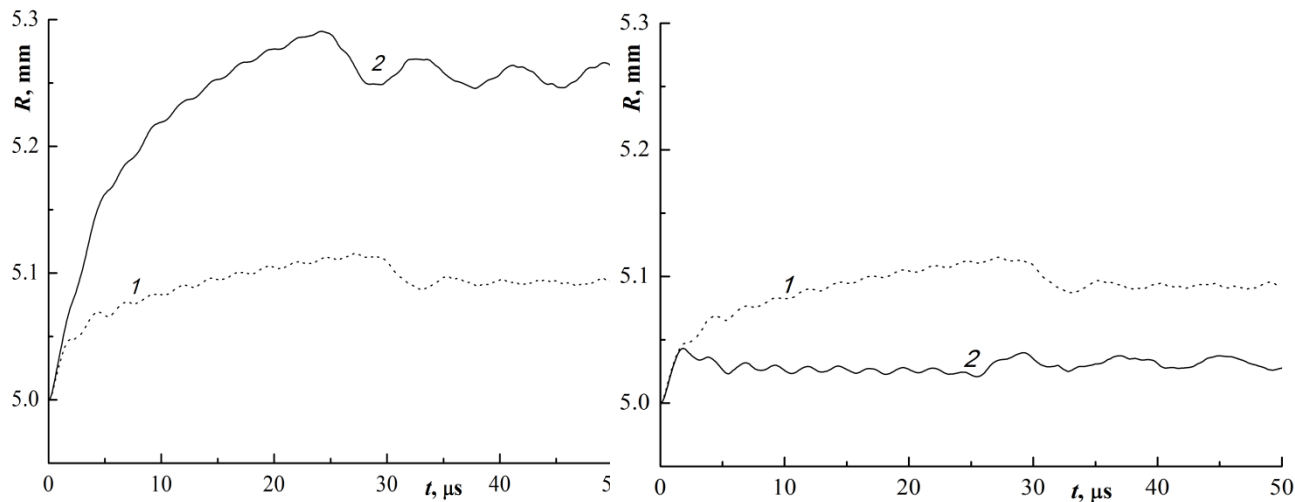
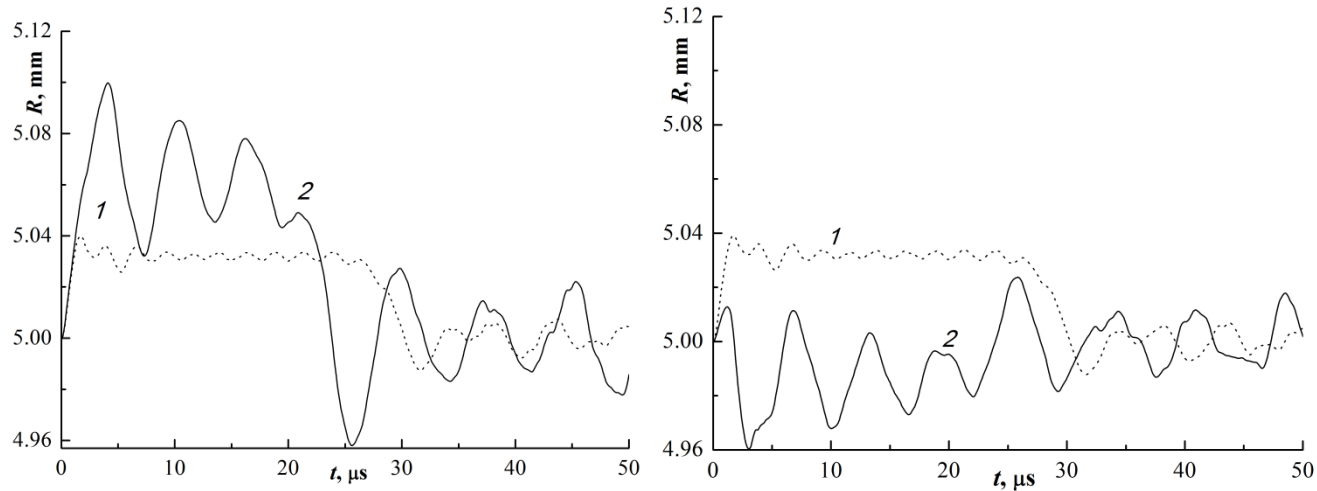
:  $C_{l,33}=2923$  м/с,  $C_{l,11}=C_{l,22}=4749$  м/с,

Скорости пластических волн :  $C_{b,33}=3030$  м/с,  $=C_{b,11}=C_{b,22}$

:  $C_{b,33}=2742$  м/с,  $C_{b,11}=C_{b,22} = 3383$  м/с

Сопротивление ударно-волновому деформированию и разрушению монокристаллов цинка при повышенных температурах А.А. Богач, Г.И. Канель, С.В. Разоренов, А.В. Уткин и др. \ФТТ 1998 №10

**Ауксетичность:** изменение радиуса цилиндра из монокристалла с кубической симметрией свойств при упругой и упругопластической деформациях во взаимно перпендикулярных направлениях:



$$1. \nu = 0.426 \text{ (ВЖМ8);}$$

$$2. \nu_1 = -0.14, \nu_2 = 0.788$$

$$\lambda_{11} = 1.136, \lambda_{22} = 0.93, \lambda_{33} = 0.93, \lambda_{11} / \lambda_{33} = 1.22.$$

# Уравнения состояния изотропного и анизотропного материалов

Таблица 1

$$PV = -V \frac{\partial \Phi_0(V)}{\partial V} + 2\gamma \bar{E}_k - \text{уравнение Ми-Грюнайзена}$$

$\Phi_0$  - потенциальная энергия

$\bar{E}_k$  - кинетическая энергия колебаний решетки

$P = P_{II}(V) + \frac{\gamma}{V} \bar{E}_k$  - с ростом температуры тепловое давление может превзойти холодное

$$P = \sum_{n=1}^3 K_n \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right)^n \left[ 1 - K_0 \left( \frac{V_0}{V} - 1 \right) / 2 \right] + K_0 \rho E$$

$$P_{ij} = \sum_{n=1}^3 K_{nij} \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right)^n \left[ 1 - K_{0ij} \left( \frac{V_0}{V} - 1 \right) / 2 \right] + K_{0ij} \rho E$$

**Холодная часть УС** определяется изменением энергии взаимодействия внутри молекулы и между молекулами от объема, **Тепловая часть УС** определяется колебательным движением молекул.

**Параметры Грюнайзена** определяются процессами теплового расширения, теплопроводности, поглощением упругой волны.

$$\gamma_{\perp} = 2,15 \quad \gamma_{\square} = 1,9.$$

$$\gamma_{\perp} = \frac{V}{C_P} [(C_{11} + C_{12})\alpha_{\perp} + C_{13}\alpha_{\square}]$$

$$\gamma_{\square} = \frac{V}{C_P} [C_{33}\alpha_{\square} + 2C_{13}\alpha_{\perp}]$$

Экспериментальные значения коэффициента Грюнайзена композита 4КМС

$l$ , мм	$\Phi$ , Дж/см <sup>2</sup>	$\Delta T_{\max}$ , К	$\Gamma$
10	42	65	-0,012
	49	76	-0,015
15	40	63	-0,006
	53	82	-0,005

4КМС – композит, полученные из углеродных волокон, с заполнением матрицы углеродом

Таблица 2

Экспериментальные значения коэффициента Грюнайзена и скорости звука пиролитических графитов [10]

Материал	$\Gamma$		$c$ , см/мкс	
	$c$	$a$	$c$	$a$
УПВ-1	0,26 ± 0,04	0,17 ± 0,03	0,36 ± 0,04	0,53 ± 0,05
PG3	0,3	0,2	0,36	0,61
CAPG	0,48 ± 0,03	-0,99 ± 0,15	0,38 ± 0,05	2,2 ± 0,1

Примечание: а — ориентация образца вдоль плоскости осаждения углерода, с — перпендикулярно ей.

CAPG по структуре близок к монокристаллу графита (T=3000K, P=30МПа)

**Анизотропия коэффициентов сжимаемости и линейного теплового расширения Zn [Киттель Ч.]**

$\beta_{\perp} \cdot 10^6$ , см <sup>2</sup> /кг	$\beta_{\square} \cdot 10^6$ , см <sup>2</sup> /кг	$\beta_{\square}/\beta_{\perp}$	$\alpha_{\perp} \cdot 10^6$ , 1/град	$\alpha_{\square} \cdot 10^6$ , 1/град	$\alpha_{\square}/\alpha_{\perp}$
0.16	1.38	8.6	14	64	4.57

Таким образом, результаты настоящей работы показывают, что параметры термоупругих напряжений, возникающих в анизотропных материалах при их импульсном разогреве излучением, значительно отличаются от параметров напряжений в изотропных однородных материалах. В зависимости от выбранного направления в материале и условий облучения в значительных пределах может изменяться не только величина напряжений, но и их знак. Соответственно, даже при большом энерговыделении возможны варианты, когда возникающие напряжения могут быть достаточно малыми и даже близкими к нулю.

А.П. Степовик Измерения коэффициента Грюнайзена некоторых анизотропных углеродных материалов



## Выводы:

1. представленная математическая модель не имеет ограничения на величину анизотропии линейного сжатия анизотропного материала на всех этапах деформирования материала;
2. сумма тензора анизотропного давления и девиатора тензора полных напряжений в области упругих деформаций составляет тензор полных напряжений;
3. анизотропия упругих постоянных и коэффициентов Грюнайзена определяет анизотропию давления в области пластических деформаций и разрушения материала в условиях сжатия;
4. анизотропное давление обеспечивает анизотропию скоростей распространения волн пластического сжатия и растяжения, определяет процесс пластического деформирования материала, процесс деформирования разрушенного материала в условиях сжатия;
5. для применения анизотропного давления при разложении тензора полных напряжений на части, отвечающие изменению объема и изменению формы необходимо и достаточно отсутствие в матрице упругих постоянных коэффициентов взаимного влияния первого и второго рода (по А.Л. Рабиновичу).



Спасибо за внимание!