Международная конференция
XVI Забабахинские научные чтения
г. Снежинск, РФЯЦ-ФНИИТФ, 2023

Квазигидродинамический (КГиД) алгоритм при численном моделировании течения расплава в методе Чохральского

Возможности квазигазодинамического (КГД) алгоритма при его реализации в OpenFOAM

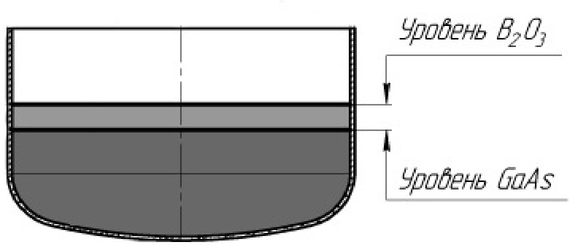
М.А. Кирюшина, Т.Г. Елизарова, А.С. Епихин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

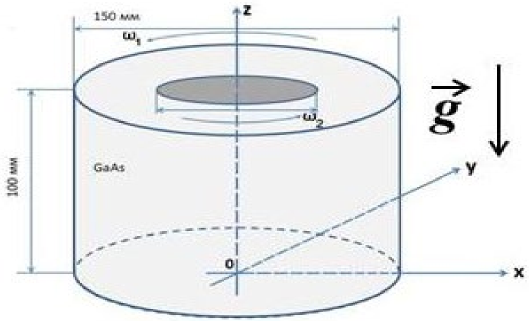
30 мая 2023 г.

План доклада

Метод Чохральского



Постановка задачи



Результаты расчета

https://github.com/m-ist/Chochralsky_mulesQHDFoam.

Тестирование. Задача о гравитационной конвекции в квадратной области

Список литературы

[1] В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов Численное моделирование процессов тепло- и массообмена М.: Наука, 1984.

[2] V. Haslavsky, E. Miroshnichenko, E. Kit, and A. Yu. Gelfgat Comparison and a possible source of disagreement between experimental and numerical results in a Czochralski model // Tech Science Press. FDMP, vol. 9, no. 3, pp. 209-234, 2013.

[3] Reza Faiez, Farzad Najafi, Yazdan Rezaei Convection interaction in GaAs/LEC growth model // International Journal of Computational Engineering Research. ISSN (e): 2250-3005. Vol. 5, issue 7, 2015.

[4] Гончаров А.Л., Девдариани М.Т., Простомолотов А.И., Фрязинов И.В. Аппроксимация и численный метод решения трехмерных уравнений Навье – Стокса на ортогональных сетках // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 5. С. 89–109.

[5] Бессонов О.А., Полежаев В.И. Карты режимов и пространственные эффекты конвективных взаимодействий в гидродинамической модели метода Чохральского. // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 2. С.16-28.

[6] Бессонов О.А. Влияние вращения кристалла и тигля на устойчивость течения в модели метода Чохральского при низких числах Прандтля // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2016, № 4, с. 33-43.

Уравнения Навье-Стокса для описания течений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости

Приближение Буссинеска $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)),$

Уравнение несжимаемости $div\vec{u} = 0$

Уравнение для импульса $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + div(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho_0} div\Pi_{NS} - \beta\vec{g}(T - T_0)$$

Уравнение переноса температуры $$\frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{u}T) = x\Delta T$$

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – гидродинамическая скорость
$p = p(\vec{x}, t)$ – давление, отсчитываемое от гидростатического
$(\vec{u} \otimes \vec{u})$ – тензор второго ранга, результат прямого произведения двух векторов
$\Pi_{NS} = \mu\left[\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right) + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^T\right]$ – тензор вязких напряжений Навье-Стокса
μ- коэффициент динамической вязкости
x - коэффициент температуропроводности
ν– коэффициент кинематической вязкости, $\mu = \nu\rho_0$

Получение уравнения Пуассона

Уравнение для импульса в недивергентном виде $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu\, \Delta\vec{u} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p - \beta\vec{\mathrm{g}}(T - T_0).$$

С учетом $div\vec{u} = 0$ вычисляем дивергенцию от уравнения для импульса, получаем уравнение Пуассона

$$\frac{1}{\rho_0}\Delta p = -div[(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] - div(\beta\vec{\mathrm{g}}(T - T_0)).$$

КГиД система уравнений в приближении Буссинеска

$$\vec{u}^* = \vec{u} + \tau \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, p^* = p, T^* = T.$$

$$div(\vec{u} - \vec{w}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + div\big((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}\big) + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho_0} div\Pi - \beta \vec{g}(T - T_0),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{u}T) = div(\vec{w}T) + x\Delta T,$$

Здесь τ – параметр регуляризации, имеет размерность времени.

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho_0}\left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p - \beta \vec{g}(T - T_0)\right], \; \Pi = \Pi_{NS} + \rho_0 \vec{u} \otimes \vec{w}.$$

Теорема об энтропии

Теорема о диссипации энергии.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\vec{u}^2}{2}\right)+div\ \left[(\vec{u}-\vec{w})\left(\rho\frac{\vec{u}^2}{2}+p\right)-\rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})-(\Pi_{NS}\cdot\vec{u})\right]=\rho\vec{F}\cdot(\vec{u}-\vec{w})-\Phi$$

$$\Phi_{QHD}=\frac{(\Pi_{NS}:\Pi_{NS})}{2\mu}+\frac{\rho\vec{w}^2}{\tau}$$ – **неотрицательная диссипативная функция.**

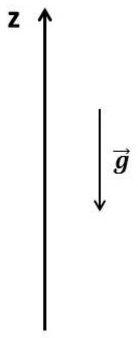
Для полной кинетической энергии $E\ =-\int\limits_{V_0}\left(\rho\frac{\vec{u}^2}{2}\right)d\vec{x}$ $\qquad$ $\frac{dE(t)}{dt}=-\int\limits_{V_0}\Phi\ d\vec{x}$

$$\frac{dE(t)}{dt}\leq 0$$

Точные решения КГиД системы и системы Навье-Стокса
Закон Архимеда. Распределение давления в покоящейся несжимаемой жидкости

Полагаем $\vec{F} = \vec{g}, \vec{u} = 0$

$$\nabla \mathrm{p} = \rho \vec{g}$$

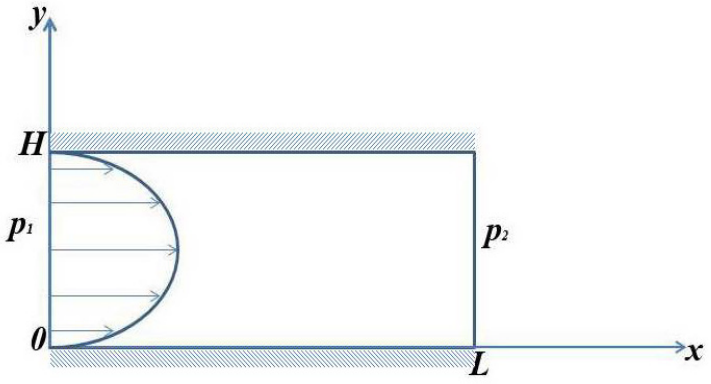


$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho|\vec{g}|$$

$$p = p_0 - \rho|\vec{g}|\mathrm{z}$$

$$\vec{f}_{\mathrm{A}} = \rho \vec{g} V$$

Точные решения КГиД системы и системы Навье-Стокса
Течения Куэтта и Пуазейля



Ищем решение в виде

$u_x = u(y), \qquad u_y = u_z = 0, \qquad p = p(x)$

без внешних массовых сил

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \ \nu\eta$$

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + 2\tau u \frac{d^2 p}{dx^2}$$

С учетом граничных условий

$p(0) = p_1, \mathrm{p(L)} = p_2, u(0) = u(H) = 0$

$$u = u_x = \frac{\Delta p}{2\mu L} y(H - y)$$

$$p = \left(1 - \frac{x}{L}\right) p_1 + \frac{x}{L} p_2$$

Вектор плотности потока массы

$$j_{mx} = \frac{\Delta p}{2\nu L}[y(H - y) + 2\tau\nu]$$

Точные решения КГиД системы и системы Навье-Стокса
Движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами с угловыми скоростями ω_1 и ω_2

$$R_1 > R_2 \quad (r, \varphi, z)$$

$$u_\varphi = u(r) \quad u_r = u_z = 0 \quad p = p(r)$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{u^2}{r}\right)\right] = 0 \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{\rho u^2}{r}$$

$$\nu\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\tau}{r}\frac{d}{dr}\left[ru\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{u^2}{r}\right)\right] + \frac{\tau u}{r}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} - \frac{u^2}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho u^2}{r}$$

$$u(R_1) = R_1\omega_1 \qquad u(R_2) = R_2\,\omega_2$$

Распределение скорости

$$\mathrm{u} = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)r}$$

$$j_{m\varphi} = \rho u_\varphi, j_{mr} = j_{mz} = 0$$

Сила вязкого трения

$$f_\varphi = \Pi_{r\varphi}|_{r=R_1} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) + \rho u_r u_\varphi\right]|_{r=R_1} = -2\mu\frac{(\omega_1 - \omega_2)R_2^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

Точные решения КГиД системы и системы Навье-Стокса
Задача о ламинарном течении Пуазейля в круглой трубе

$$u_z = u(r) \qquad u_r = u_\varphi = 0 \quad p = p(z)$$

$$\triangle p = p_1 - p_2 > 0$$

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = 0$$

$$z_1 = 0 \; z_2 = L$$

$$p(0) = p_1 \; p(L) = p_2$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\mu\frac{du}{dr}\right) + 2ru\frac{d^2 p}{dz^2}$$

$$u(R) = 0$$

$$u_z = \frac{\triangle p}{4\mu L}(R^2 - r^2) \qquad u_r = u_\varphi = 0$$

$$p = \left(1 - \frac{z}{L}\right)p_1 + \frac{z}{L}p_2$$ удовлетворяет системе Навье-Стокса

Массовый расход жидкости через круговое сечение трубы

$$Q_m = 2\pi \int_0^R r j_{mz} dr = \frac{\pi \triangle p}{8\nu L} R^2 \left[1 + 8\frac{\tau\nu}{R^2}\right] \quad j_{mz} = \rho u_z + \frac{\tau \triangle p}{L} \quad j_{mr} = j_{m\varphi} = 0$$

КГД теория предсказывает увеличение расхода жидкости при ее течении через тонкие капилляры без использования условий скольжения

Точные решения КГиД системы и системы Навье-Стокса
Течение в плоском вертикальном канале

Стационарное конвективное движение жидкости между двумя ||-ми неподвижными изотермическими плоскостями на расстоянии 2

$$u_x = 0 \qquad u_y = u(x) \;\; p = const \quad T = T(x) \qquad |x| < 1 \, - \text{безразмерный вид}$$

$$w_x = 0 \qquad w_y = -\tau GrT$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + GrT = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$u(-1) = u(1) = 0, T(-1) = 1, T(1) = -1$$

$$u_y = \frac{Gr}{6}(x^3 - x) \;\; T = -x$$

$$j_{mx} = 0, j_{my} = \frac{Gr}{6}(x^3 - x) - \tau Grx$$

Слева жидкость течет вверх, справа – вниз.

$$Q_m = \int_{-1}^{1} j_{my}\, dx = 0$$

Получение уравнения Пуассона для КГиД метода

Для КГиД системы уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности. Подставляя в уравнение неразрывности выражение для $\vec{w}$, получаем уравнение для давления при постоянных значениях ρ_0 и τ:

$$\frac{1}{\rho_0}\Delta p = -div\left[\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right] + \boldsymbol{\frac{1}{\tau}div\vec{u}} - div(\beta\vec{g}(T - T_0)).$$

Граничные условия для давления в этом случае являются прямым следствием поставленных в задаче граничных условий для векторов скорости $\vec{u}$ и добавки к скорости $\vec{w}$.

Для твердой непроницаемой стенки в качестве граничного условия можно поставить $\vec{u}_n = 0$ и $\vec{w}_n = 0$. Из этих двух условий следует граничное условие для давления

$$\vec{\nabla}p = -\rho_0\beta\vec{g}(T - T_0).$$

Опыт численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости показал, что при больших скоростях вынужденной конвекции в численном решении уравнения переноса для температуры появляются нефизичные осцилляции.

Другой способ регуляризации КГиД уравнений – добавление еще одного сглаживающего слагаемого

На малом по времени интервале сглаживания изменяется не только скорость, но и температура жидкости

$$\vec{u}^* = \vec{u} + \tau \frac{\partial \vec{u}}{\partial t},\ p^* = p, T^* = T + \tau \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Производная по времени вычисляется, исходя из недивергентного вида уравнения переноса температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T + \chi \Delta T.$$

Уравнение теплопроводности в КГиД системе включает в себя дополнительное слагаемое

КГиД система уравнений в приближении Буссинеска, включенная в открытый код OpenFOAM

$$div(\vec{u} - \vec{w}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + div\big((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}\big) + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho_0} div\Pi - \beta\vec{g}(T - T_0),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{u}T) = div(\vec{w}T) + x\Delta T + div(\tau\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T)).$$

Параметр регуляризации τ

Характерное гидродинамическое время τ_0 в задачах вынужденной конвекции можно определить через коэффициент кинематической вязкости ν и характерную скорость u_0 в размерном виде как $\tau_0 = \dfrac{\nu}{u_0^2}$.

$$\tau \sim \tau_0$$

Как показывает опыт вычислений, начиная с некоторого значения уменьшение параметра τ перестает влиять на точность численного решения.

Шаг по времени выбирается так

$$\Delta t < \beta\tau, \quad \beta \approx 0.5$$

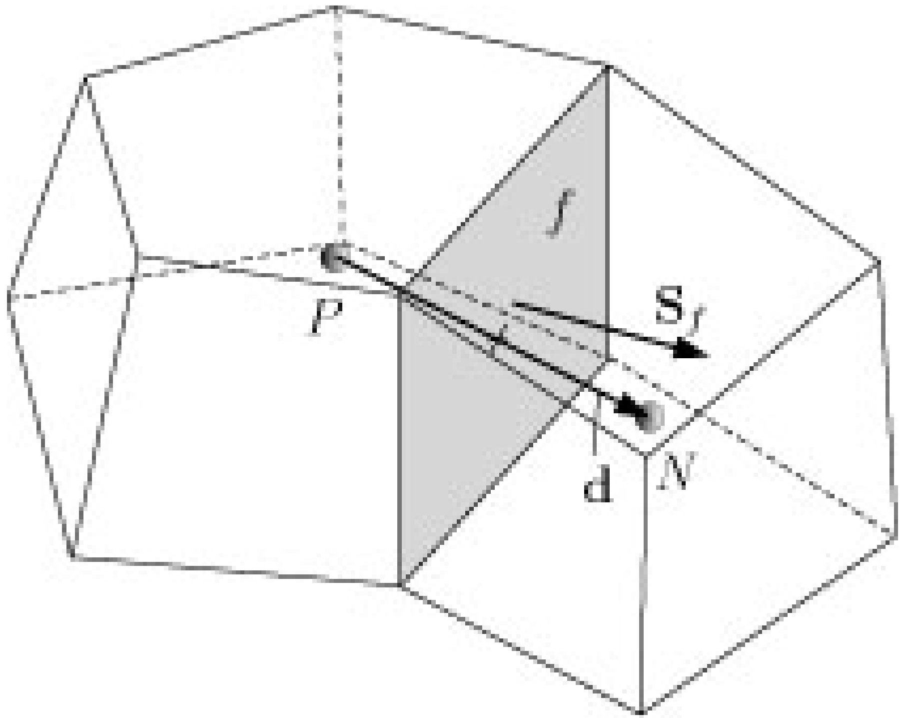
$$u_0 = \omega_1 R = 3.9 * 10^{-2}\ м / сек$$

$$\tau = 0.001 \text{ сек.}$$

$$\tau_0 = \frac{\nu}{u_0^2} = 3.3 * 10^{-4} сек$$

$$\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}\ сек.$$

Метод конечного объема



Исходную КГиД систему перепишем в общем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} - \operatorname{div}\mathbf{W} = 0$$

В соответствии с методом конечного объема

проинтегрируем систему по контрольному объему

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S}\mathbf{U}dS - \oint\limits_{\partial S}\left(\mathbf{W}\cdot\mathbf{n}\right)dl = 0$$

Аппроксимируем интеграл по контрольному объему

$$\oint\limits_{\partial S}\left(\mathbf{W}\cdot\mathbf{n}\right)dl = \sum_{i}\Big(W_x(P_{i+1/2})n_x(P_{i+1/2}) + W_y(P_{i+1/2})n_y(P_{i+1/2})\Big)L_i$$

Реализация КГД/КГиД в OpenFOAM

Требует доработки OpenFOAM:

1) вычисление τ-слагаемых в центрах граней

2) выбор способов вычисления τ и КГД/КГиД-вязкости

3) бесшовная связь параметров КГД/КГиД-алгоритма с остальными системами OpenFOAM

Реализуется стандартными средствами OpenFOAM:

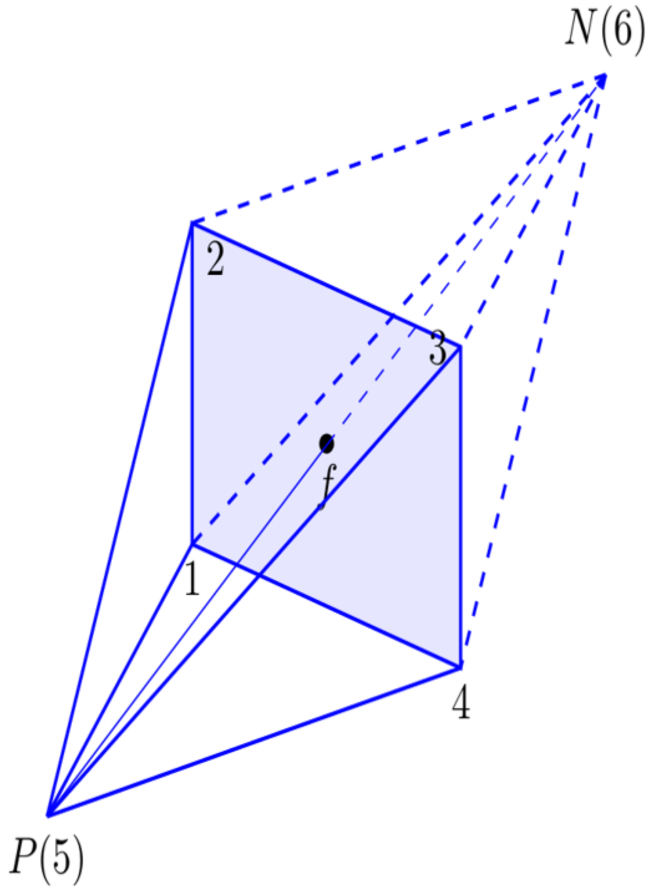
1) Консервативная форма записи уравнений

2) Явная схема интегрирования по времени

3) Вычисление потоков интерполяцией с центров объёмов на центры граней

4) Интеграция с другими моделями (турбулентности, горения и пр.)

Варианты вычисления производных в центрах граней



fvsc:: - Методы для расчета в центрах граней градиента и дивергенции газодинамических полей, заданных в центрах ячеек

МНК - универсальный подход, но чрезвычайно требовательный к качеству сетки

Применение метода Гаусса к фиктивному контрольному объему, определенному вокруг рассматриваемой грани f. Реализован для 3- и 4-х вершинных граней (обычно 95% всей сетки), может быть расширен для любого количества вершин

Способ аппроксимации выбирается пользователем при запуске

При необходимости можно реализовать новый способ

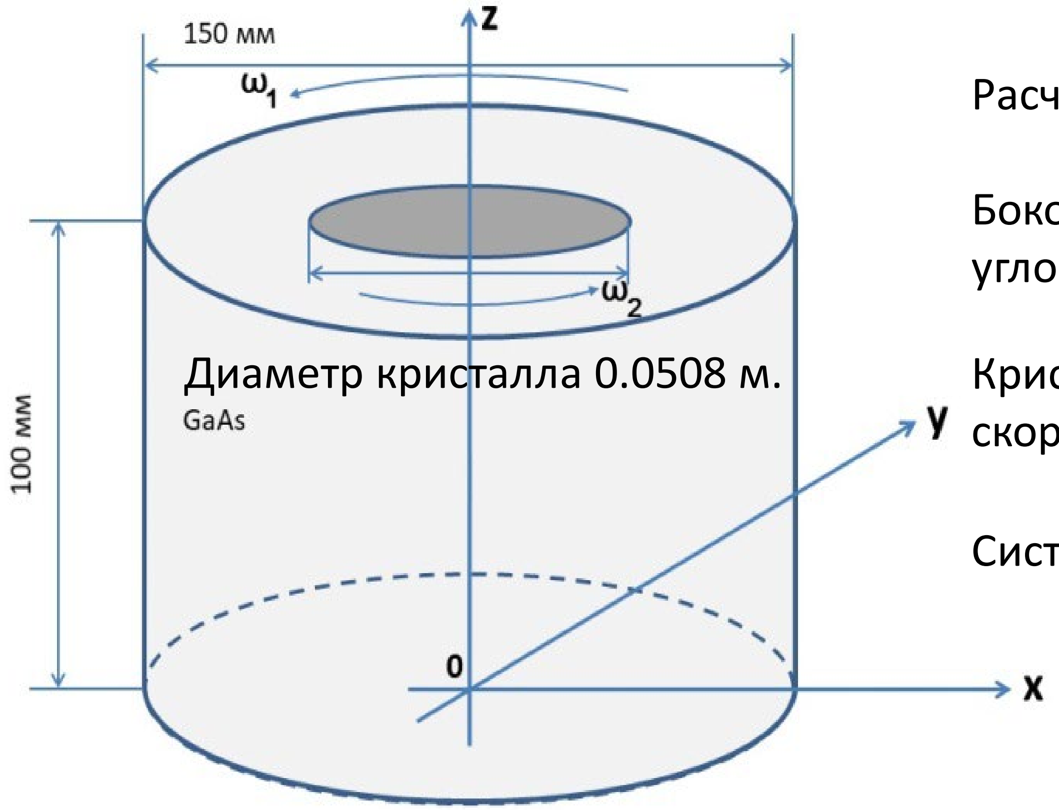
Достоинства КГиД алгоритма

- Работает без потоковых лимиторов
- Монотонно сходится к решению
- Процедура аппроксимации универсальна для всех типов течений
- Статья Мат. моделирование Рязанов. Нет дополнительных итерация для выполнения условия $div\vec{u} = 0$, есть в явном виде гр. условия для давления.
- В отличие от КГД КГиД-алгоритм второго порядка точности.

КГиД - QHDFoam: явная схема с центральными разностями, без ограничителей потока

Постановка задачи

Прямое численное моделирование нестационарного течения расплава в методе Чохральского в полной трехмерной постановке с учетом вращения и реальных параметров расплава



Расчетная область – цилиндр.

Боковая поверхность, соединенная с дном – тигль – вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 5\ обор/мин.$

Кристалл вращается в противоположную сторону с угловой скоростью $\omega_2 = -10\ обор/мин.$

Система находится в поле силы тяжести g=9.81 м/сек^2.

Солвер mulesQHDFoam. Все величины в размерном виде.

Параметры расплава GaAs в размерном виде

Молярная масса M	144.644 г/моль
Динамическая вязкость	0.00279 кг/(м*сек)
Кинематическая вязкость	0.49 $*10^{-6}$ $м^2/с$
Теплопроводность при температуре расплава	0.178 Вт/(см*К)
Коэффициент теплового расширения расплава β	$1.87 \cdot 10^{-4}$ $К^{-1}$
Число Прандтля Pr	0.068
Плотность ρ_0	5720.0 $кг/м^3$
Теплоемкость при постоянном давлении Cp	434.0 Дж/(кг*К)

Начальные условия расчета

Давление p	Скорость U	Температура T
10^6 Па	**(0,0,0)**	**1511 ^{o} K**

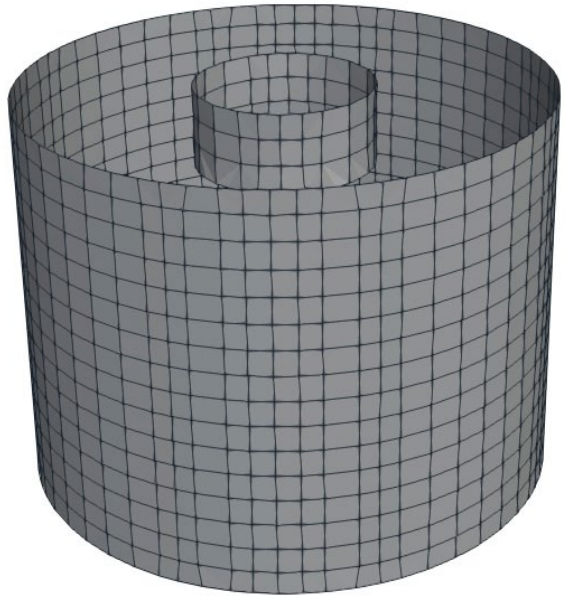
Граничные условия для основных гидродинамических величин

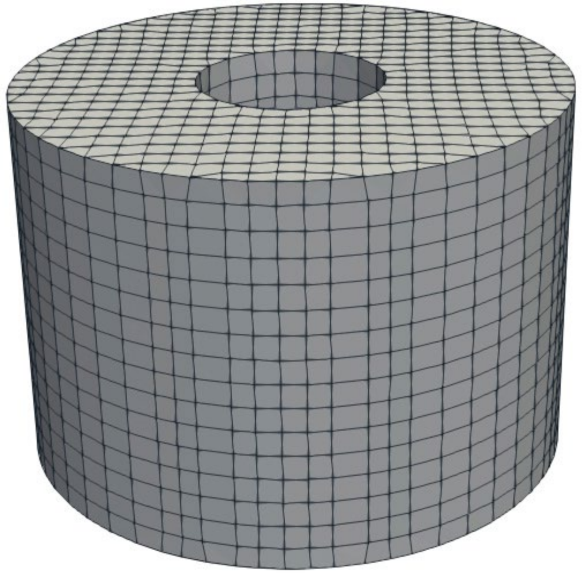
	Тигель	Кристалл	Свободная поверхность
Давление p	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\beta\rho_0\vec{g}(T - T_0)$	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\beta\rho_0\vec{g}(T - T_0)$	10^6 Па
Скорость **U**	$\omega_1 = 0.52\frac{рад}{c}$	$\omega_2 = -1.04\frac{рад}{c}$	$\vec{u}_z = 0, \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}_y}{\partial z} = 0$
Температура T	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$	1500 ^{o} K	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$

Задание граничных условий в кейсе Chochralsky_mulesQHDFoam

	Тигель (outerCylinder)	Кристалл (disk)	Свободная поверхность (outlet)
p	qhdFlux	qhdFlux	10^6 Па
U	outerCylinder {type rotatingWallVelocity; origin (0 0 0); axis (0 0 1); omega 0.52; }	Disk {type rotatingWallVelocity; origin (0 0 0); axis (0 0 1); omega -1.04; }	Slip
T	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$	1500 ^{o} K	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$

Виды расчетной сетки на границах расчетной области





Построение расчетной области:

blockMesh

snappyHexMesh

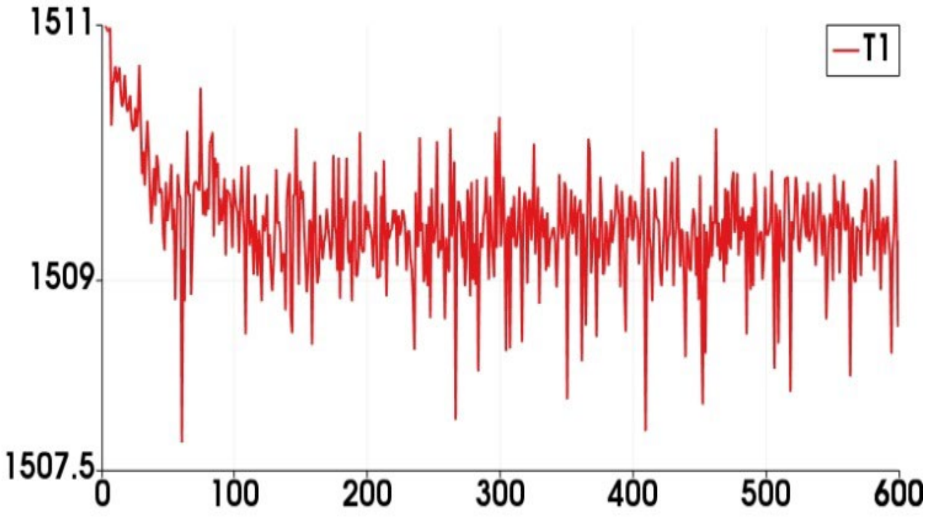
topoSet

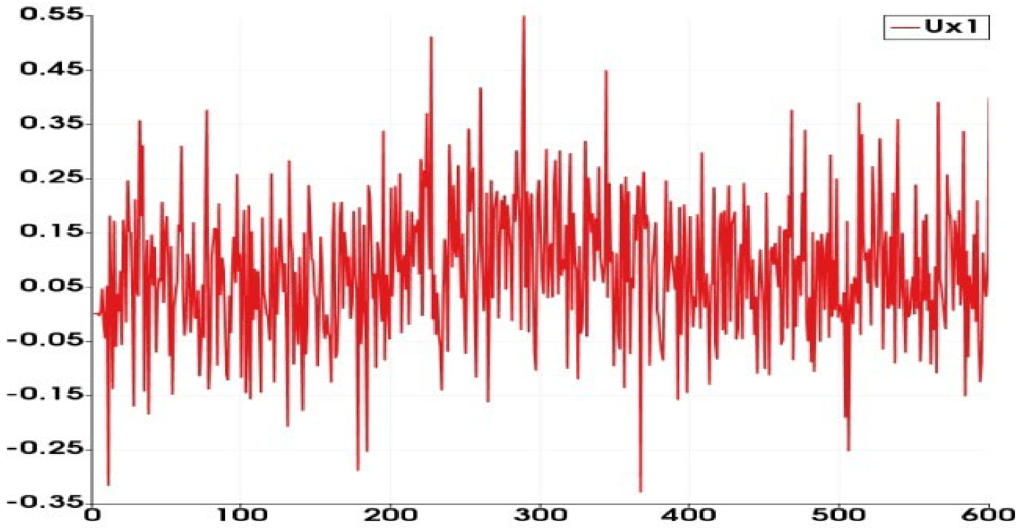
Кристалл имеет высоту в 3 ячейки сетки.

Общее количество ячеек расчетной сетки имеет порядок 7000.

На приведенной сетке время одного расчета в 50 оборотов тигля составляет порядка 5 часов на 12 ядрах многопроцессорного комплекса К100.

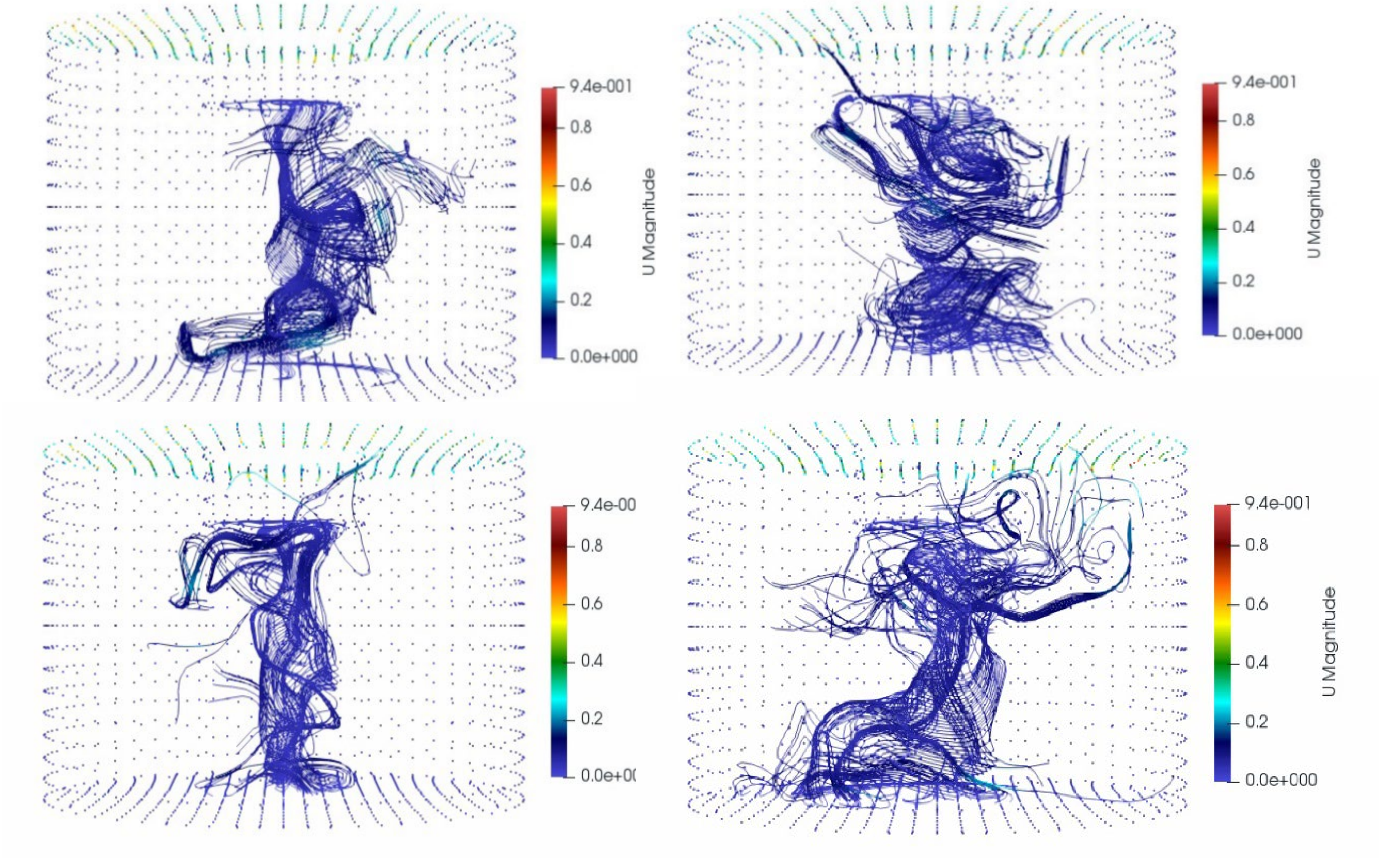
Пример зависимости от времени для температуры Т (слева) и компоненты скорости u_x вблизи нижней поверхности растущего кристалла



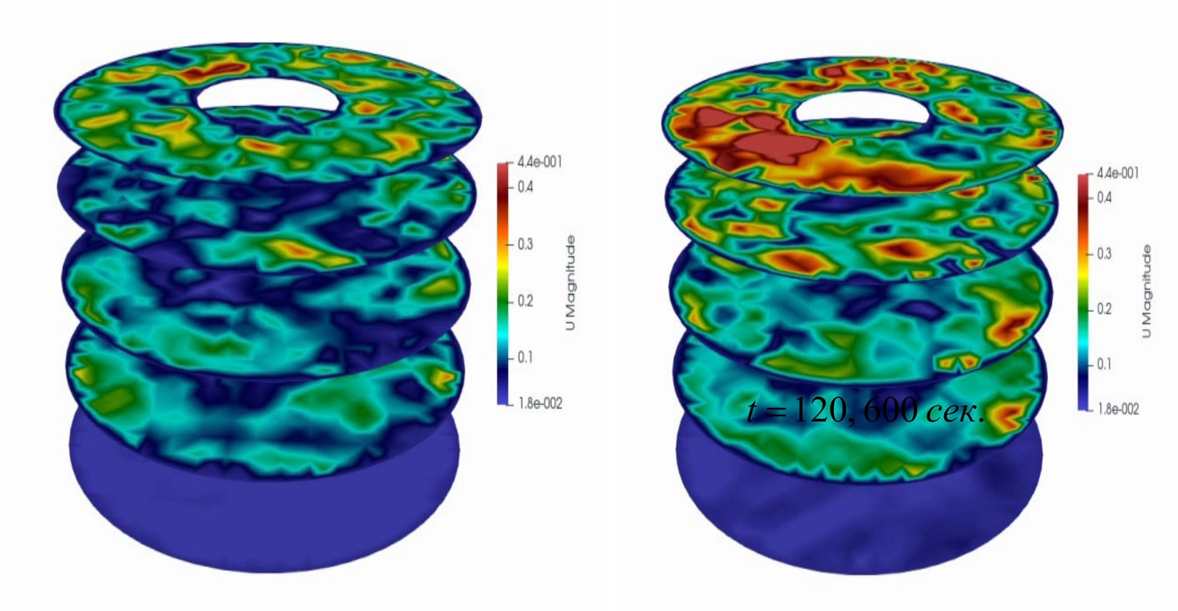


После 5 оборотов тигля картина течения устойчиво нестационарная.

Пример структуры течения
Пространственная картина мгновенных траекторий частиц на моменты времени
t=588, 589, 590 и 591 с.



Оценка модуля скорости во всем объеме



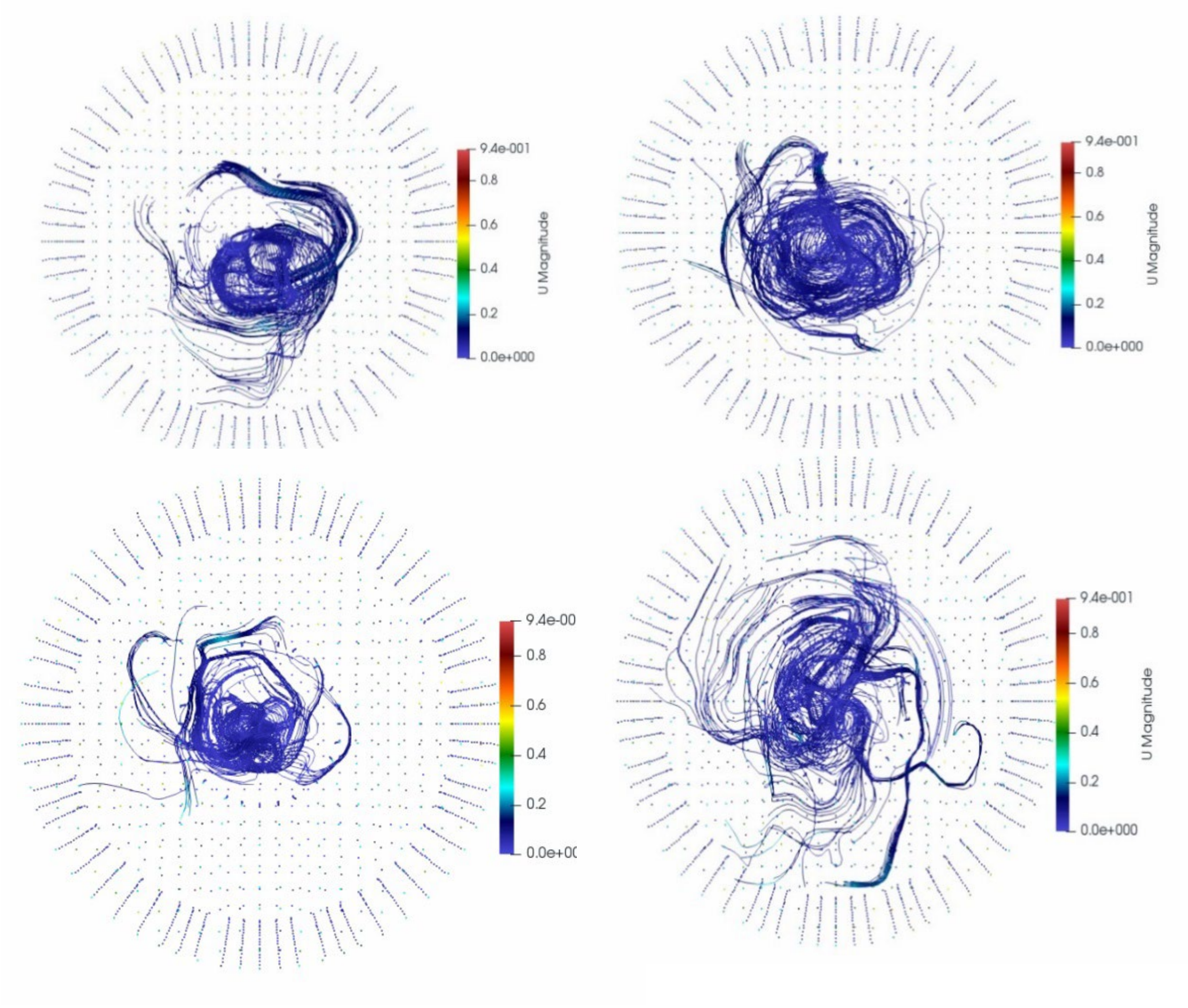
$t = 120, 600$ *сек*

Модуль скорости для 5 срезов z = 0.001, 0.025, 0.05, 0.075 и 0.095

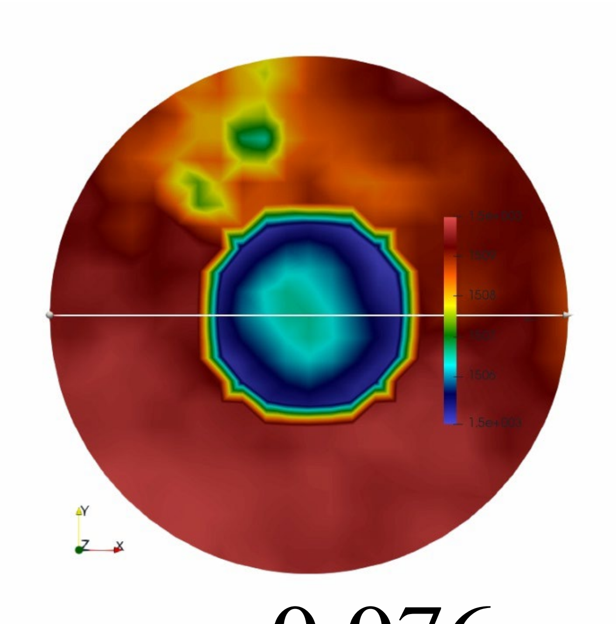
Максимальная скорость 0.44 м/сек.

10 и 50 оборотов тигля. Модуль скорости для 5 срезов.

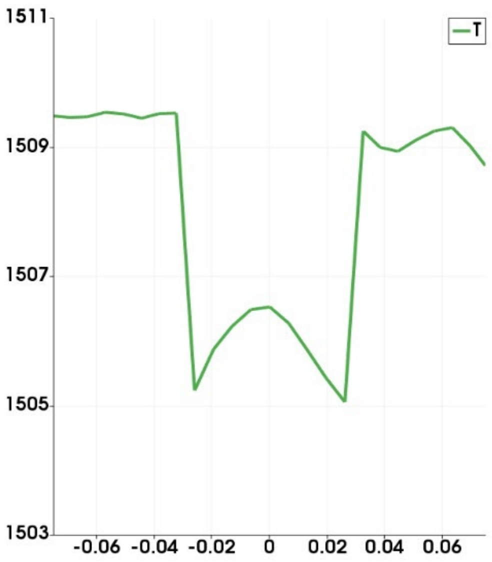
Траектории частиц в азимутальной плоскости на последовательные моменты времени с интервалом в 1 сек.



Пример мгновенного распределения температуры под кристаллом



$$z = 0.076$$



t=600

Температура вдоль оси x

Роль тепловой гравитационной и вынужденной конвекций

$$\mathrm{Re} = \frac{u_0 R}{\nu} \approx 6 * 10^5$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T R^3}{\nu^2} \approx 3.4 * 10^6$$

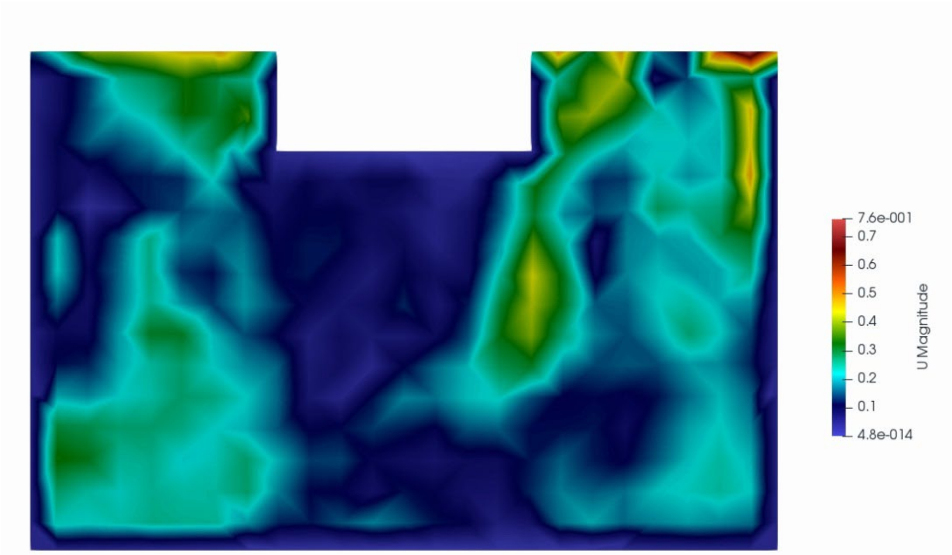
Перенос тепла за счет конвекции преобладает над теплопереносом за счет теплопроводности.

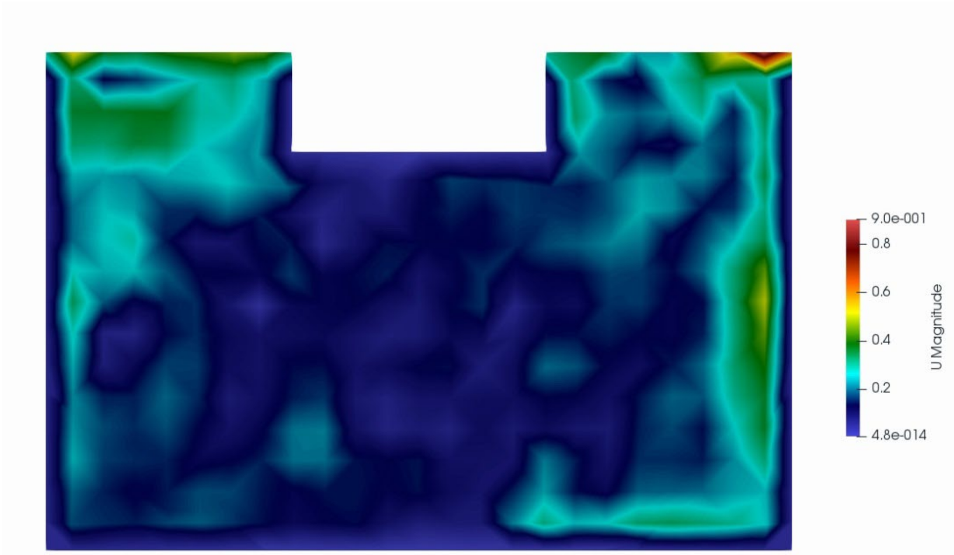
γ - относительная роль гравитационной конвекции по сравнению с вынужденной конвекцией

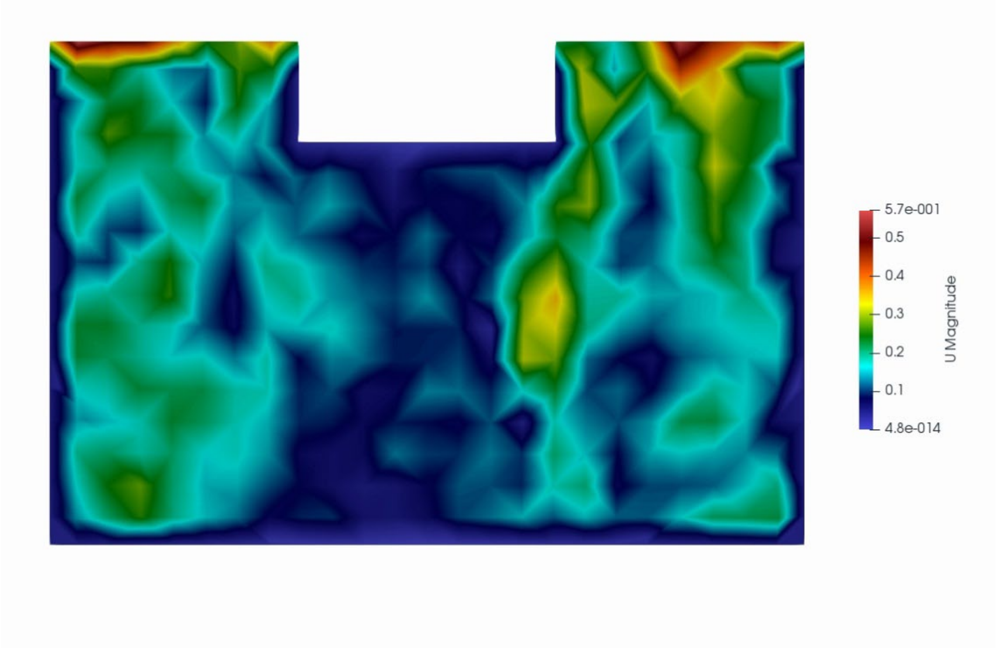
$$\gamma = \frac{Gr}{\mathrm{Re}^2} = 10^{-5}$$

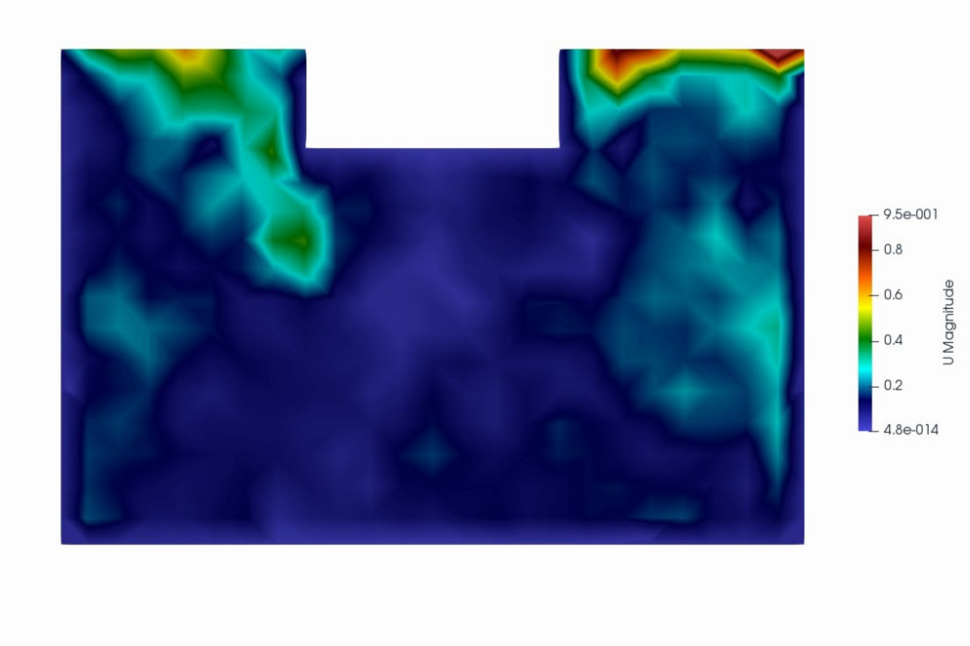
При $\gamma > 1$ преобладает тепловая конвекция, в противоположном случае преобладает вынужденная конвекция, вызванная вращением тигля и кристалла.

Модуль скорости. t=1197,1198,1199,1200

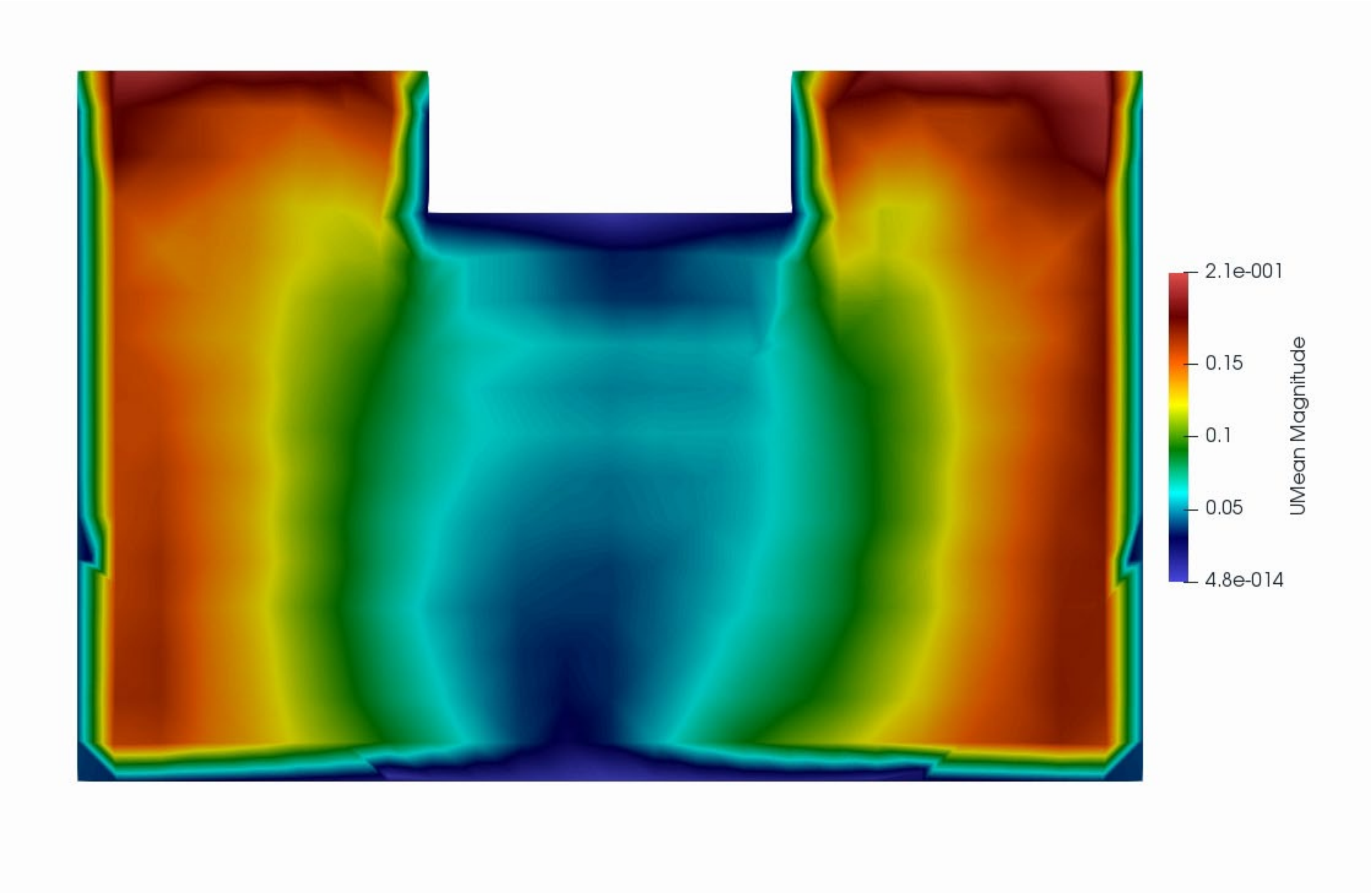




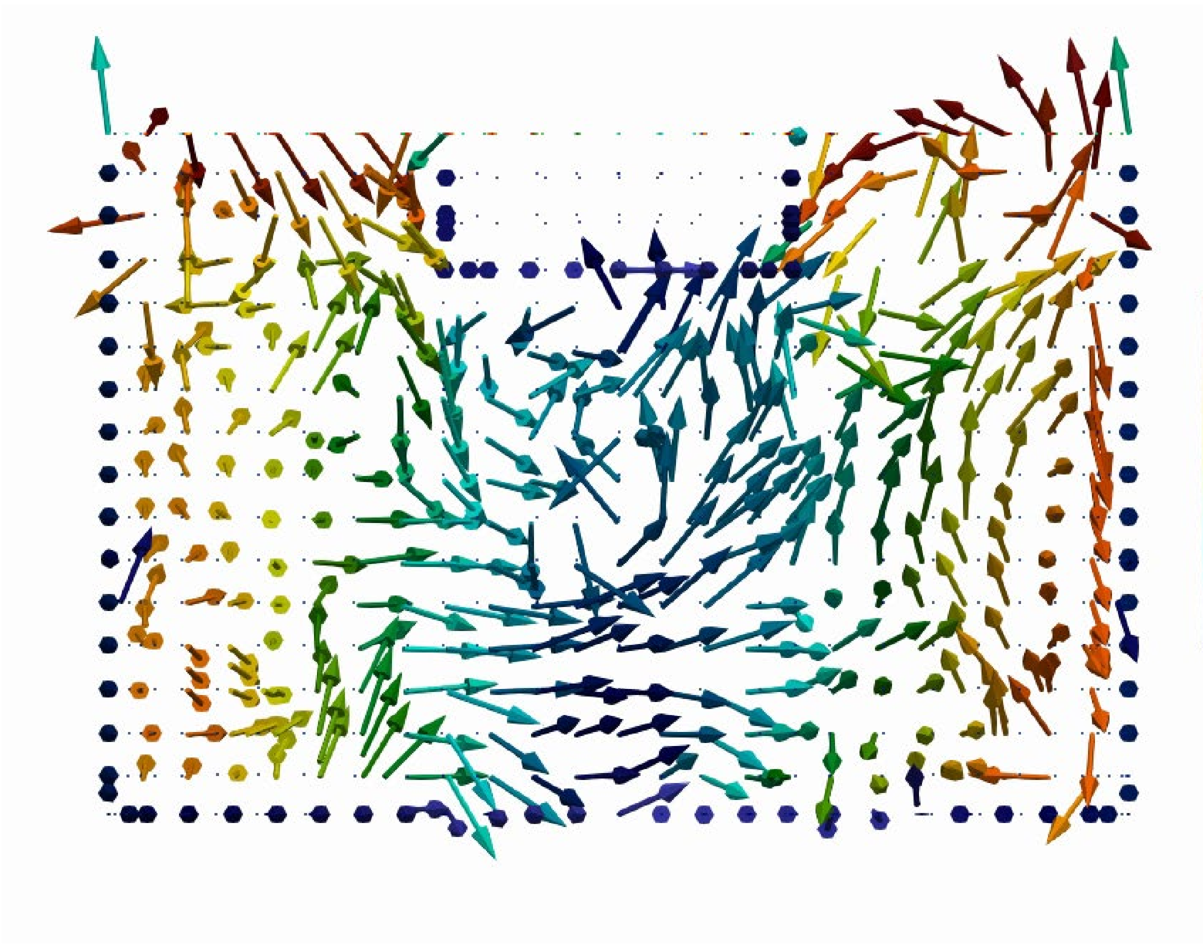


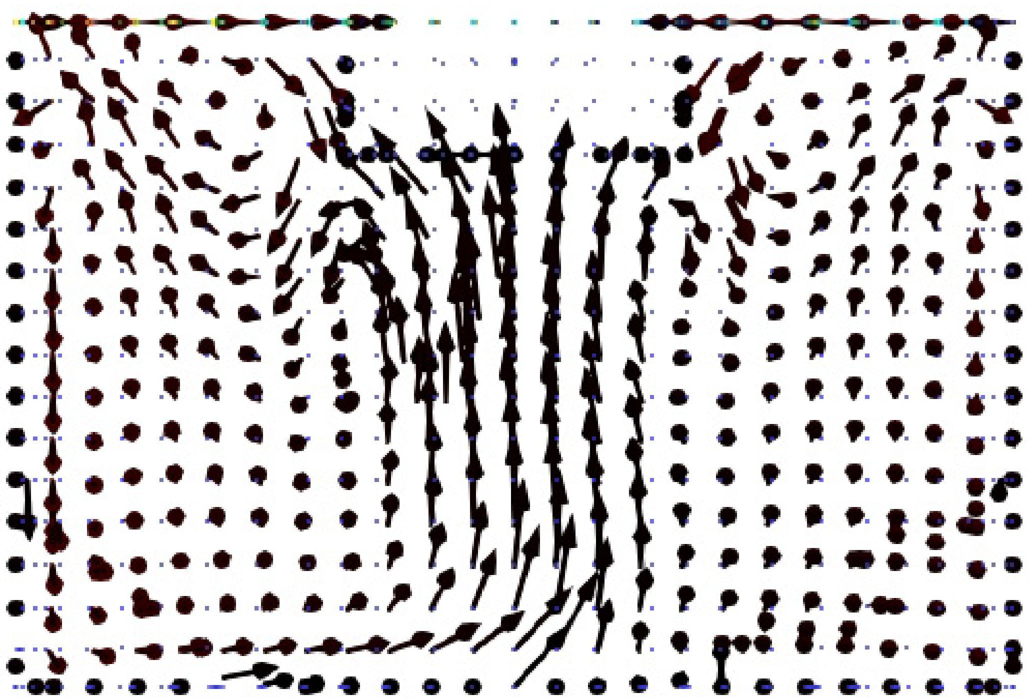


Осредненная скорость на 50 оборотах тигля



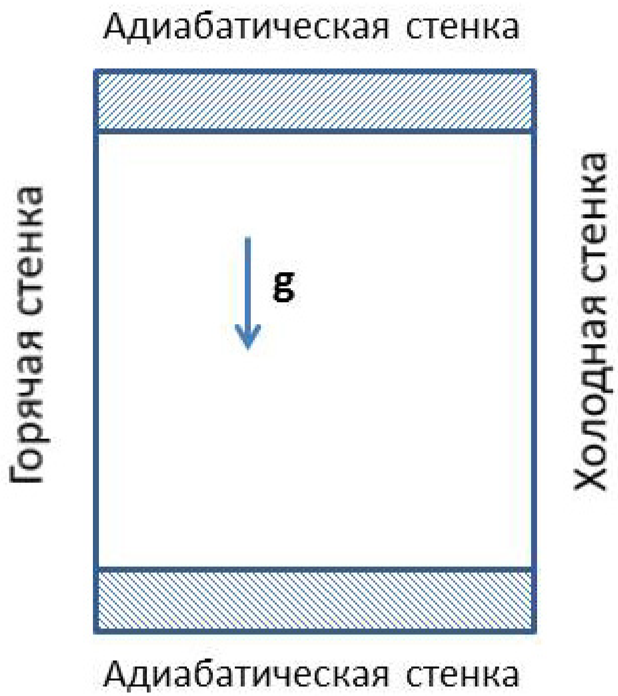
Мгновенная и осредненная картина течения





- В свободном доступе находится кейс …
- Первый расчет, выполненный для задачи Чохральского, показывает полностью нестационарный характер течения.
- Осредненное течение указывает на тороидальный вихрь и характерные вихри в перпендикулярной плоскости.

Тестирование численного алгоритма на примере задачи о гравитационной конвекции



Расчетная область - квадрат со стороной H.

Система находится в поле силы тяжести g=9.81 м/сек^2.
Сверху и снизу находятся адиабатические стенки.
Слева горячая стенка, справа холодная.

Начальные и граничные условия

Давление p	Скорость U	Температура T
0	(0,0,0)	20 ^{o} C (293.15 ^{o} K)

	Верхняя и нижняя стенки	Левая горячая стенка	Правая холодная стенка
Давление p	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\beta \rho_0 \vec{g}(T - T_0)$	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$
Скорость **U**	**U** =(0,0,0)	**U** =(0,0,0)	**U** =(0,0,0)
Температура T	$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$	40^{o} C (313.15 ^{o} K)	0 ^{o} C (273.15 ^{o} K)

$$T_0 = 20\,^{0}C$$

Размер расчетной области для разных чисел Грасгофа.

Параметры воздуха в размерном виде, но   Pr=1.0.

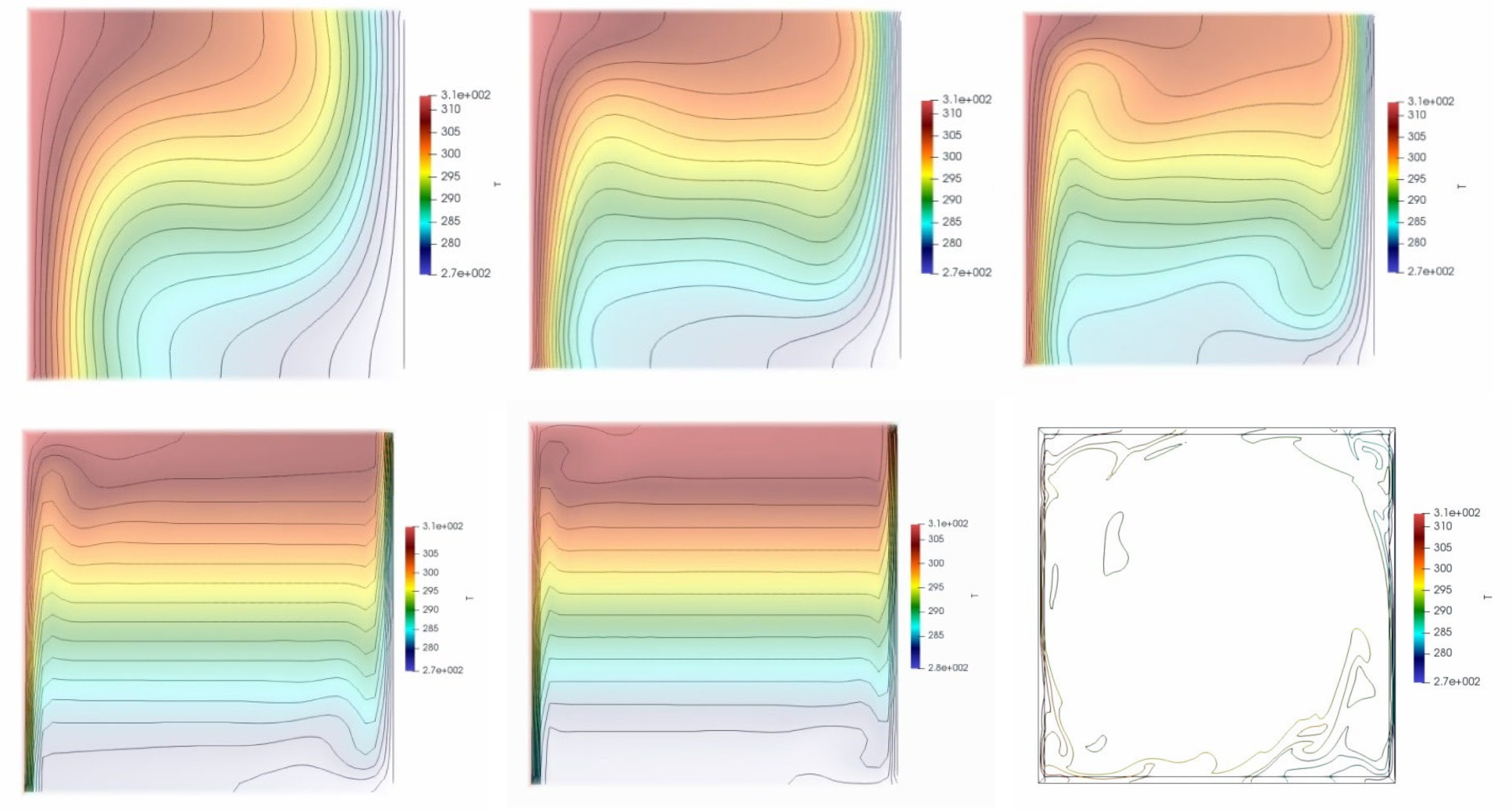
Размер расчетной области для разных чисел Грасгофа.

$$\tau = \frac{1}{Gr}\frac{H^2}{\nu} = \frac{\nu}{\beta g \Delta T H}.$$

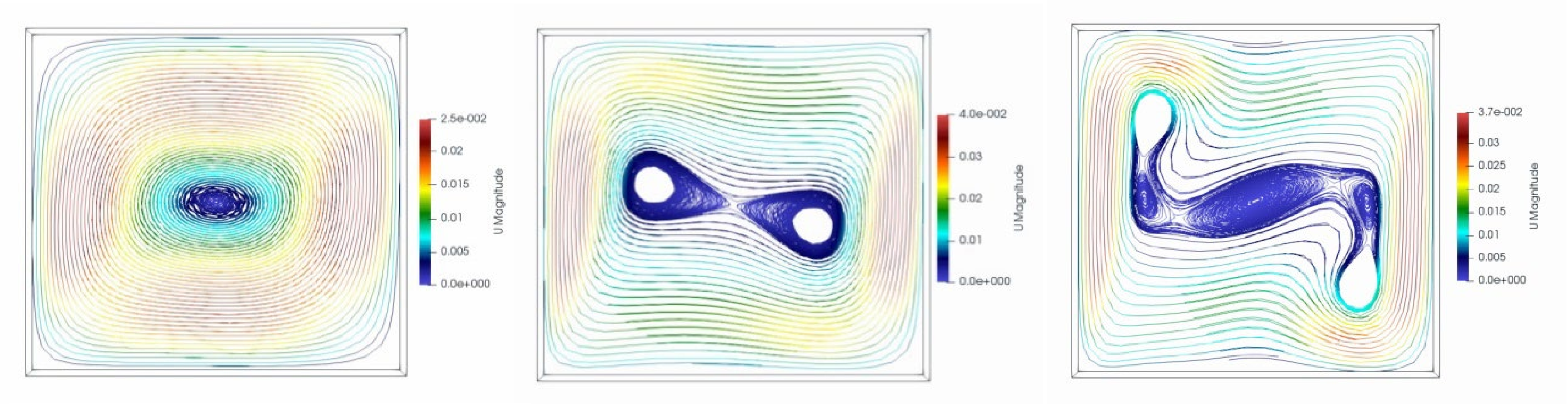
Gr	H, см	τ , сек
10^4	1.190	$9.4*10^{-4}$
10^5	2.565	$4.3*10^{-4}$
10^6	5.530	$2.0*10^{-4}$
10^7	11.900	$9.4*10^{-5}$
10^8	25.650	$4.3*10^{-5}$
$2*10^8$	32.300	$3.5*10^{-5}$
10^9	55.300	$2.0*10^{-5}$

В расчетах использовались заниженные значения τ .

Изотермы для чисел Грасгофа $Gr = 10^4, 10^5$ при $t = 40\ сек$ и для $Gr = 10^6, 10^7, 10^8$ при $t = 100\ сек$ и для $Gr = 2 \cdot 10^8$ при $t = 185\ сек$ для нестационарного режима

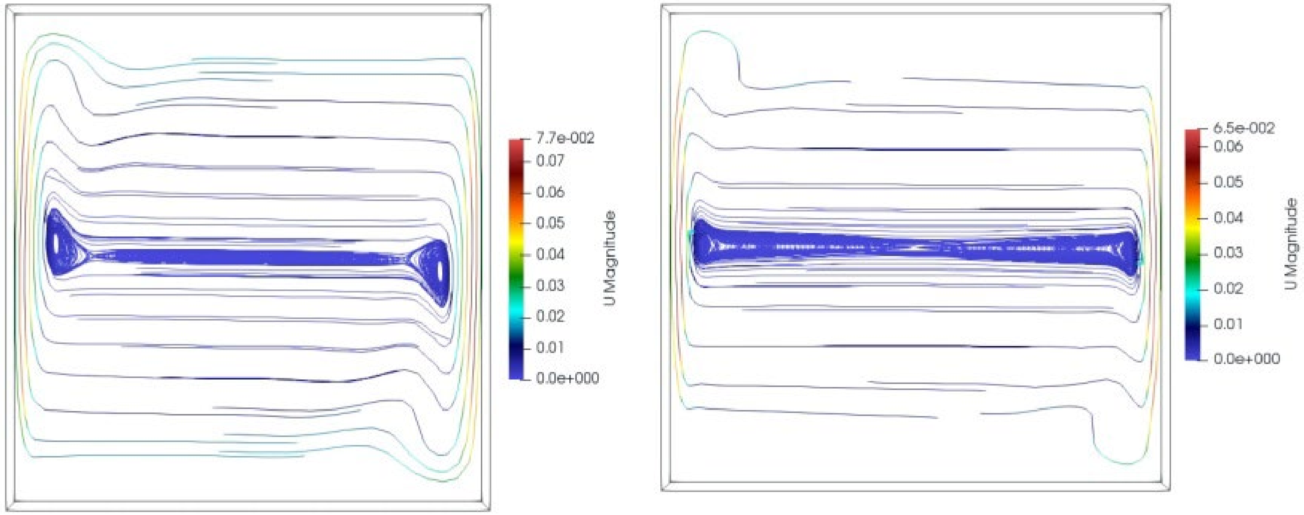


Стационарные течения = Траектории частиц



$$Gr = 10^4, 10^5$$

$$t = 40\ сек$$



$$Gr = 10^6, 10^7, 10^8$$

$$t = 100\ сек.$$

Установление стационарного режима для $Gr = 10^8$

Распределения в точках

1 и 2 с координатами

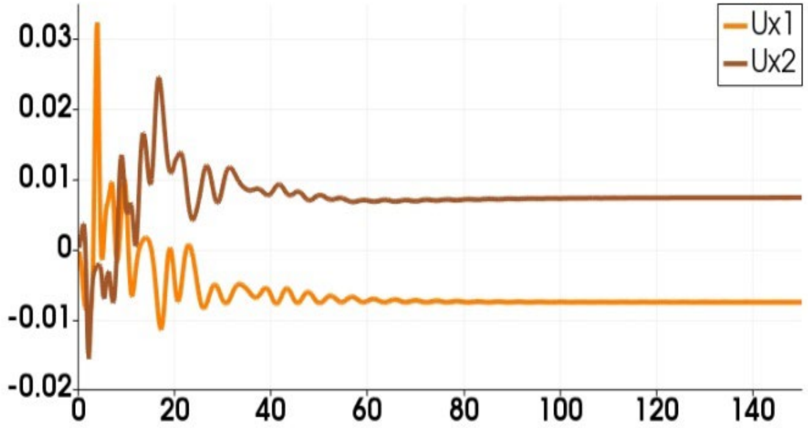
(0.064125 0.064125 0.0)

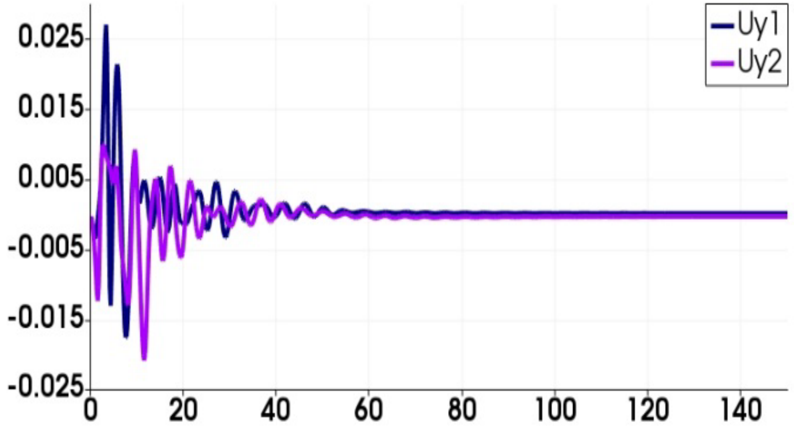
(0.064125 0.192375 0.0)

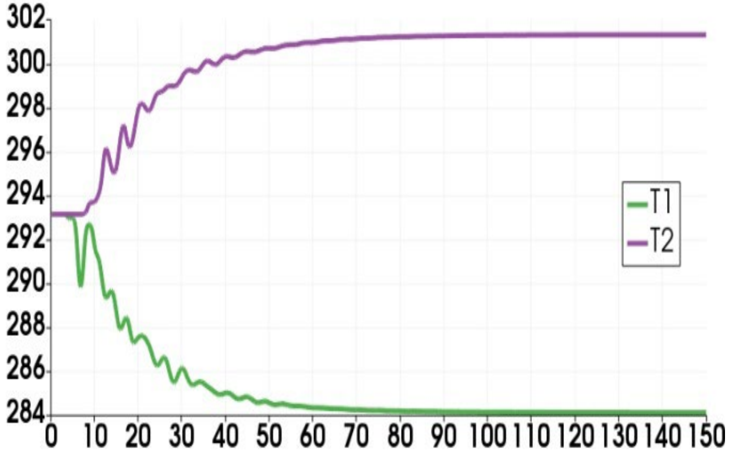
Время расчета

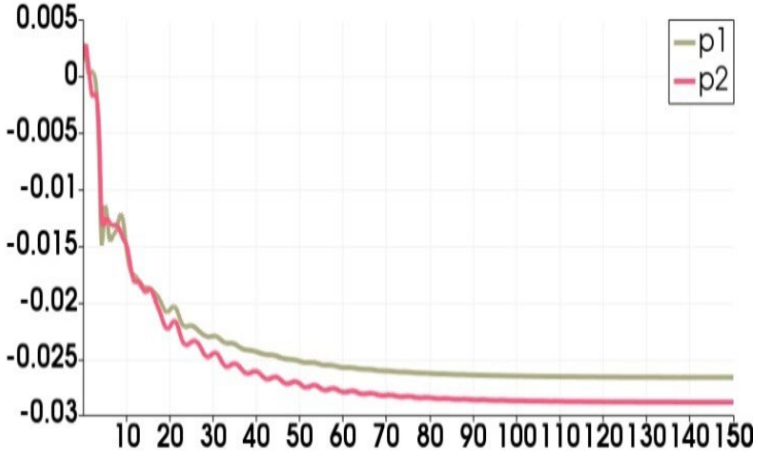
$t = 150\ сек.$

Сетка 40*40







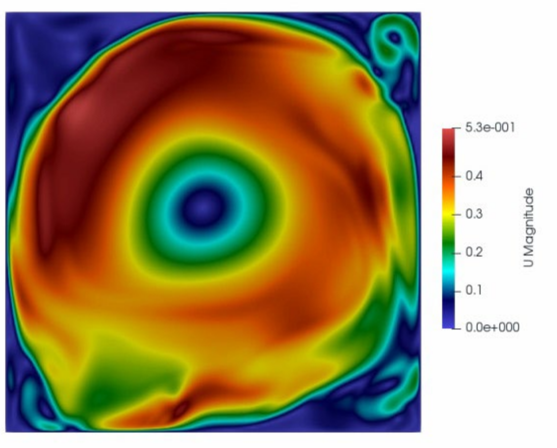


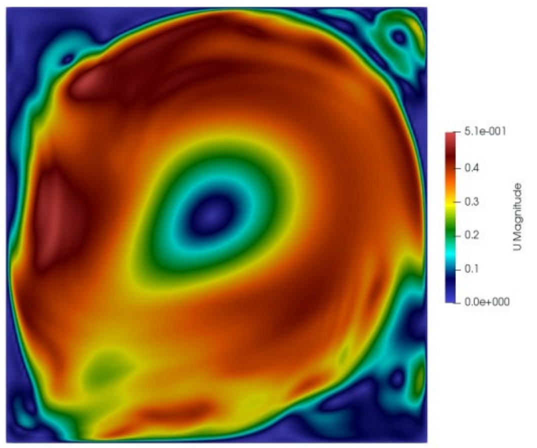
Сопоставление полученных результатов по скорости течения для максимальной величины горизонтальной скорости

Gr	Максимальная безразмерная горизонтальная скорость $\tilde{u}_x$ (0.5 H, y) по координате y	Максимальная безразмерная горизонтальная скорость $\tilde{u}_x$, диапазон скоростей для других методов *
10^4	16.02 сетка 40*40	15.967, 15.967-16.2, сетка 101*101
10^5	33.30 сетка 40*40	33.51, 33.39-34.81, сетка 101*101
10^6	52.36 сетка 40*40, 65.40 сетка 80*80, 65.43 сетка 160*160	65.55, 64.6912-65.55, сетка 101*101
10^7	125.11 сетка 40*40	145.06, 139.7-145.266, сетка 301*301
10^8	250.00 сетка 40*40, 281.50 сетка 80*80, 296.52 сетка 160*160	295.67, 283.689-296.71, сетка 301*301

* D. C. Wan, B. S. Patnaik, and G. W. Wei A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // Numerical heat transfer, Part B, 40: 199-228, 2001.

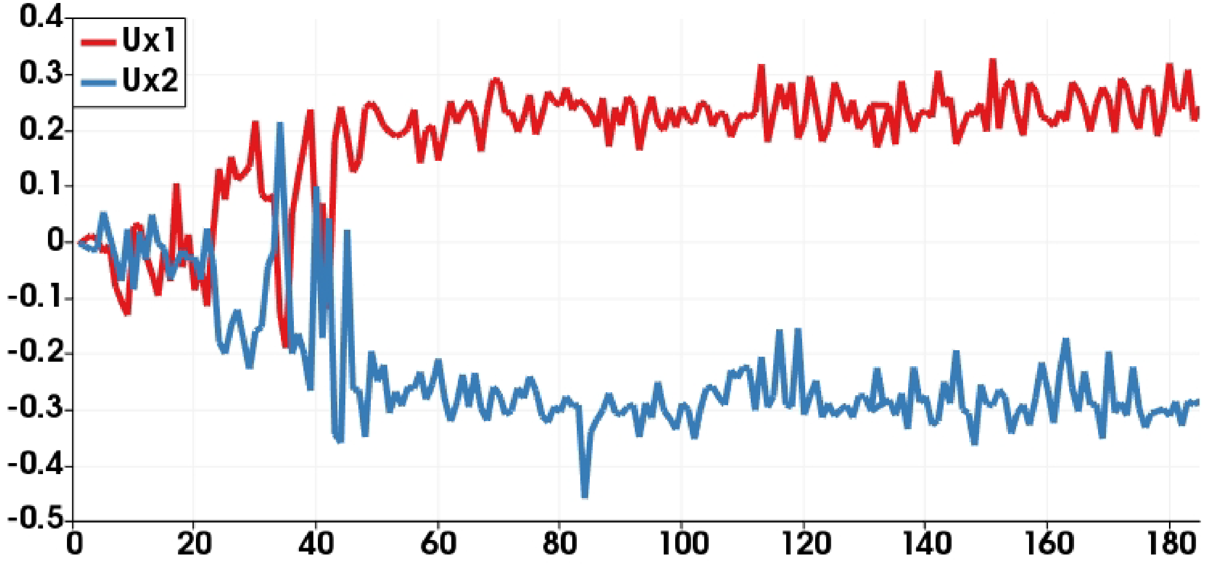
$Gr = 2 \cdot 10^8$	**282.46 сетка 40*40, 342.95 сетка 80*80** **Колебания, сетка 160*160 (старт с расчета 10^6)** **Затухающие колебания, сетка 320*320 (старт с 0, проверить, что будет, если старт с 10^6)**	**сетка 257*257 ****





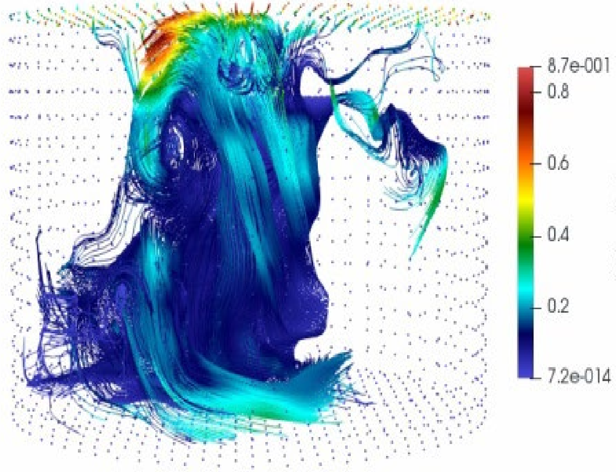
Сетка 160*160

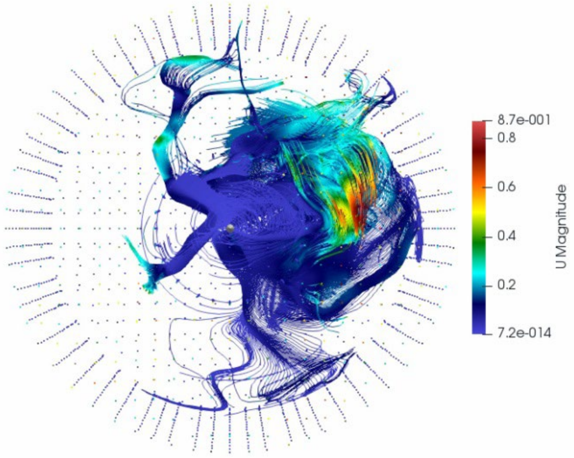
Модуль скорости на моменты времени t=182 и t=185 сек.

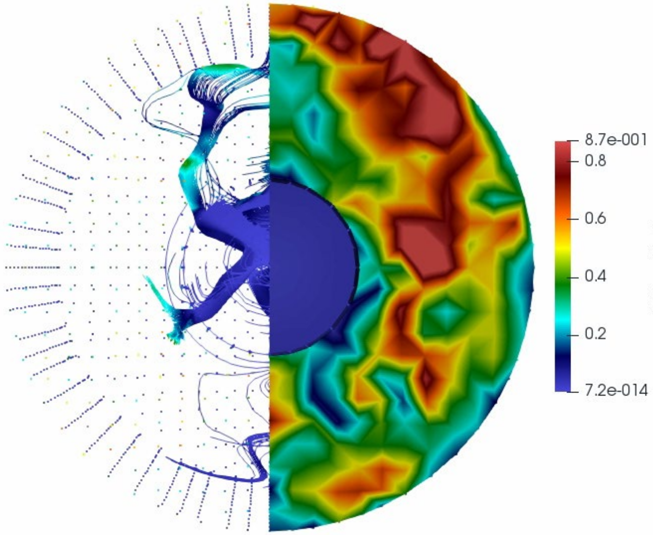


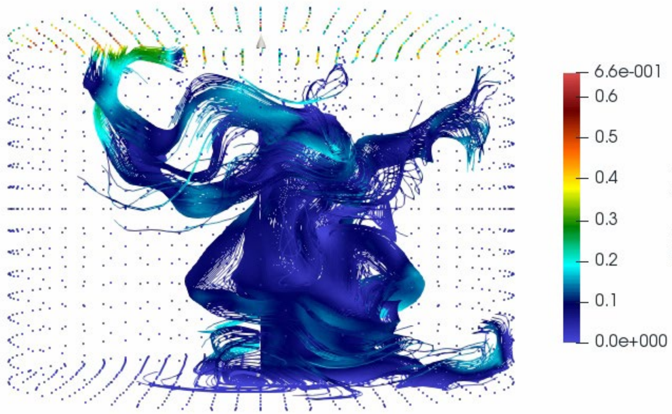
** Bingxin Zhao, Zhenfu Tian High-resolution high-order upwind compact scheme-based numerical computation of the natural convection flows in a square cavity // International journal of heat and mass transfer. 98 (2016) 313-328.

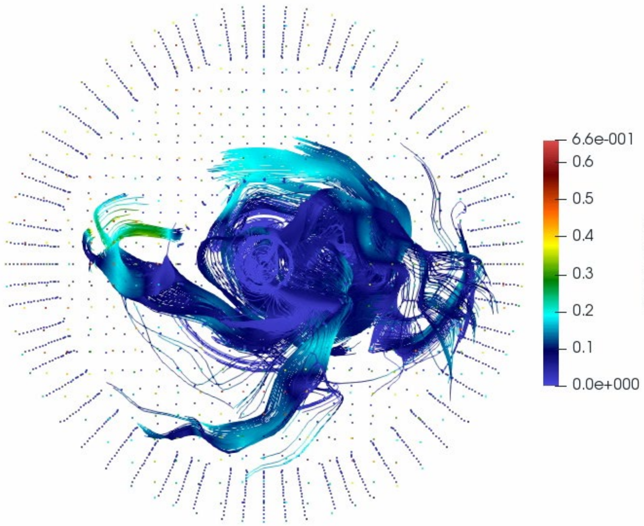
Благодарю за внимание!

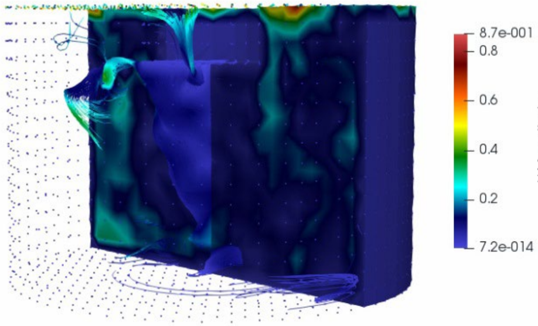

8.7e-001
0.8
0.6
0.4
0.2
7.2e-014
U Magnitude


8.7e-001
0.8
0.6
0.4
0.2
7.2e-014
U Magnitude


8.7e-001
0.8
0.6
0.4
0.2
7.2e-014
U Magnitude


6.6e-001
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0e+000
U Magnitude


6.6e-001
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0e+000
U Magnitude


8.7e-001
0.8
0.6
0.4
0.2
7.2e-014
U Magnitude