Использование частично усредненных уравнений Навье-Стокса для моделирования турбулентных течений

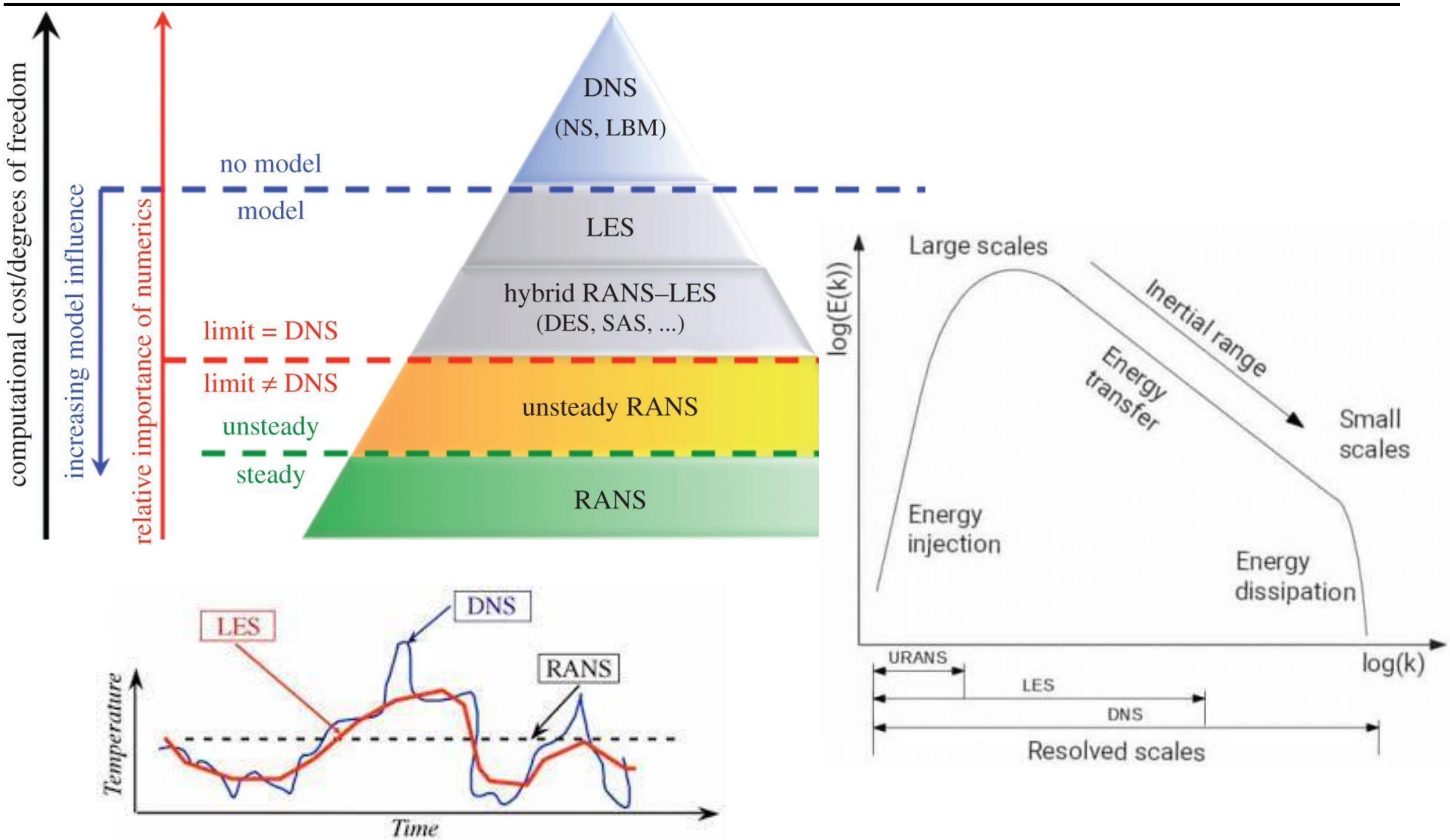
П.А. Кучугов, В.Ф. Тишкин

ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

XVI Международная конференция «Забабахинские научные чтения»

г. Снежинск, Челябинская обл., РФ,
29 мая - 02 июня 2023

Подходы к моделированию турбулентности



Deck S., Gand F., Brunet V. et al., High-fidelity simulations of unsteady civil aircraft aerodynamics: stakes and perspectives. Application of zonal detached eddy simulations, Phil. Trans. R. Soc. A, 372, 20130325, 2014, doi: 10.1098/rsta.2013.0325.

Система уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho C_\alpha) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho C_\alpha v_i) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i v_j + p\delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho E v_i + p v_i) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(v_j \sigma_{ij} - q_i\right) + \rho g_i v_i \\ p = p(\rho, \varepsilon) \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$ - тензор вязких напряжений

Уравнения Навье-Стокса, усреднённые по Рейнольдсу/Фавру

$$f = \bar{f} + f',\ f = \hat{f} + f'',\ \hat{f} = \overline{\rho f}/\bar{\rho}$$

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g},\quad \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f},\quad \overline{\bar{f} g} = \bar{f}\,\bar{g},\quad \bar{\alpha} = \alpha,\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\widehat{v_i}) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widehat{C_\alpha}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\widehat{C_\alpha}\widehat{v_i}\right) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\widehat{v_i}) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\widehat{v_i}\widehat{v_j} + \bar{p}\delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho v_i'' v_j''}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widehat{E}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\widehat{E}\widehat{v_i} + \bar{p}\widehat{v_i} + \overline{v_i''(\rho\varepsilon'' + p')} + \widehat{v_k}\overline{\rho v_k'' v_i''} + \dfrac{1}{2}\overline{\rho v_k'' v_k'' v_i''}\right) = \\
= \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{v_j}\overline{\sigma_{ij}} + \overline{v_j''\sigma_{ij}} - \overline{q_i}\right) \\
p \approx p(\bar{\rho}, \hat{\varepsilon}) \\
\bar{\rho}\widehat{E} = \bar{\rho}\left(\hat{\varepsilon} + \dfrac{1}{2}\widehat{v_k}\widehat{v_k}\right) + \bar{\rho}k
\end{cases}$$

Уравнения Навье-Стокса, усреднённые по Рейнольдсу/Фавру

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\widehat{v_i}) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widehat{C_\alpha}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\widehat{C_\alpha}\widehat{v_i}\right) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\widehat{v_i}) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\widehat{v_i}\widehat{v_j} + \bar{p}\delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\boxed{\left(\overline{\rho v_i'' v_j''}\right)} \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\hat{E}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\hat{E}\widehat{v_i} + \bar{p}\widehat{v_i} + \boxed{\overline{v_i''(\rho\varepsilon'' + p')} + \widehat{v_k}\overline{\rho v_k'' v_i''} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_k'' v_k'' v_i''}}\right) = \\
= \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{v_j}\overline{\sigma_{ij}} + \boxed{\overline{v_j''\sigma_{ij}}} - \bar{q}_i\right) \\
p \approx p(\bar{\rho}, \hat{\varepsilon}) \\
\bar{\rho}\hat{E} = \bar{\rho}\left(\hat{\varepsilon} + \dfrac{1}{2}\widehat{v_k}\widehat{v_k}\right) + \boxed{\bar{\rho}k}
\end{cases}
$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

$$f = \langle f \rangle + f' \,, \quad \{f\} = \langle \rho f \rangle / \langle \rho \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} \,, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \,, \quad \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \,, \quad \langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle \rho \rangle \{v_i\}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle \rho \rangle \{v_i\}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle \rho \rangle \{v_i\}\{v_j\} + \langle p \rangle \delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)\Big) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle \rho \rangle \{E\}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle \rho \rangle \{E\}\{v_i\} + \langle p \rangle \{v_i\}\right) = \\ = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\{v_j\}\langle \sigma_{ij} \rangle - \langle q_i \rangle\Big) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_i, H) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\langle \rho \rangle \{v_k\} \tau_1(v_k, v_i)\Big) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{2}\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_k, v_k)\right) \\ p \approx p(\langle \rho \rangle, \{\varepsilon\}) \\ \langle \rho \rangle \{E\} = \langle \rho \rangle \left(\{\varepsilon\} + \dfrac{1}{2}\{v_k\}\{v_k\}\right) + \langle \rho \rangle \dfrac{1}{2}\tau_1(v_k, v_k) \end{cases}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

$$f = \langle f \rangle + f' \,, \quad \{f\} = \langle \rho f \rangle / \langle \rho \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} \,, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \,, \quad \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \,, \quad \langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \{v_i\}) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \{v_i\}) + \dfrac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \{v_i\}\{v_j\} + \langle p \rangle \delta_{ij}) = \dfrac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j} \boxed{\left(\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j) \right)} \\
\dfrac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \{E\}) + \dfrac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \{E\}\{v_i\} + \langle p \rangle \{v_i\}) = \\
= \dfrac{\partial}{\partial x_i} (\{v_j\} \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle q_i \rangle) - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\tau_2(v_i, H)} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{(\langle \rho \rangle \{v_k\} \tau_1(v_k, v_i))} + \\
+ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\tau_2(v_j, \sigma_{ij})} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\left(\dfrac{1}{2} \langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_k, v_k) \right)} \\
p \approx p(\langle \rho \rangle, \{\varepsilon\}) \\
\langle \rho \rangle \{E\} = \langle \rho \rangle \left(\{\varepsilon\} + \dfrac{1}{2} \{v_k\}\{v_k\} \right) + \langle \rho \rangle \dfrac{1}{2} \tau_1(v_k, v_k)
\end{cases}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: выражения для корреляционных моментов

$$\tau_1(f,g) = \{fg\} - \{f\}\{g\}$$

$$\tau_2(f,g) = \langle fg \rangle - \{f\}\langle g \rangle$$

$$\tau_1(f,g,h) = \{fgh\} - \{f\}\tau_1(g,h) - \{g\}\tau_1(f,h) - \{h\}\tau_1(f,g) - \{f\}\{g\}\{h\}$$

$$\dots$$

возможно введение и других моментов

Germano M., Turbulence: the filtering approach, J. Fluid Mech., 238, 325-336, 1992, doi: 10.1017/S0022112092001733.

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$-\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,v_j) = 2\mu_u\left(\frac{\partial\{v_j\}}{\partial x_i} + \frac{\partial\{v_i\}}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial\{v_k\}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}k_u\delta_{ij}$$

$$\tau_2(v_i,H) \approx -C_p\frac{\mu_u}{Pr_t}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_i}$$

$$\langle q_i\rangle = -C_p\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_i}$$

$$\tau_2(v_j,\sigma_{ij}) - \frac{1}{2}\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,v_k,v_k) \approx \left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle k_u) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\langle\rho\rangle k_u\{v_i\}) = P_{ku} - \langle\rho\rangle\varepsilon_u + T_{ku} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle \varepsilon_u) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\langle\rho\rangle \varepsilon_u\{v_i\}) = C^*_{1\varepsilon}P_{ku}\dfrac{\varepsilon_u}{k_u} - C^*_{2\varepsilon}\dfrac{\langle\rho\rangle\varepsilon_u^2}{k_u} + T_{\varepsilon u} \end{cases}$$

$$\mu_u = \langle\rho\rangle C_{\mu u}\, {k_u^2}/{\varepsilon_u}$$

$$P_{ku} = -\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j)\frac{\partial\{v_j\}}{\partial x_i}$$

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}\right) \qquad T_{\varepsilon u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{\varepsilon u}}\right)\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_i}\right)$$

$$\boxed{f_k = \frac{k_u}{k} \qquad f_\varepsilon = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon}}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$C_{\mu u} = C_\mu$$

При дополнительном предположении, что $\{v_i\} - \widehat{v_i} = 0$, можно получить

$$C_{1\varepsilon}^{*} = C_{1\varepsilon}$$

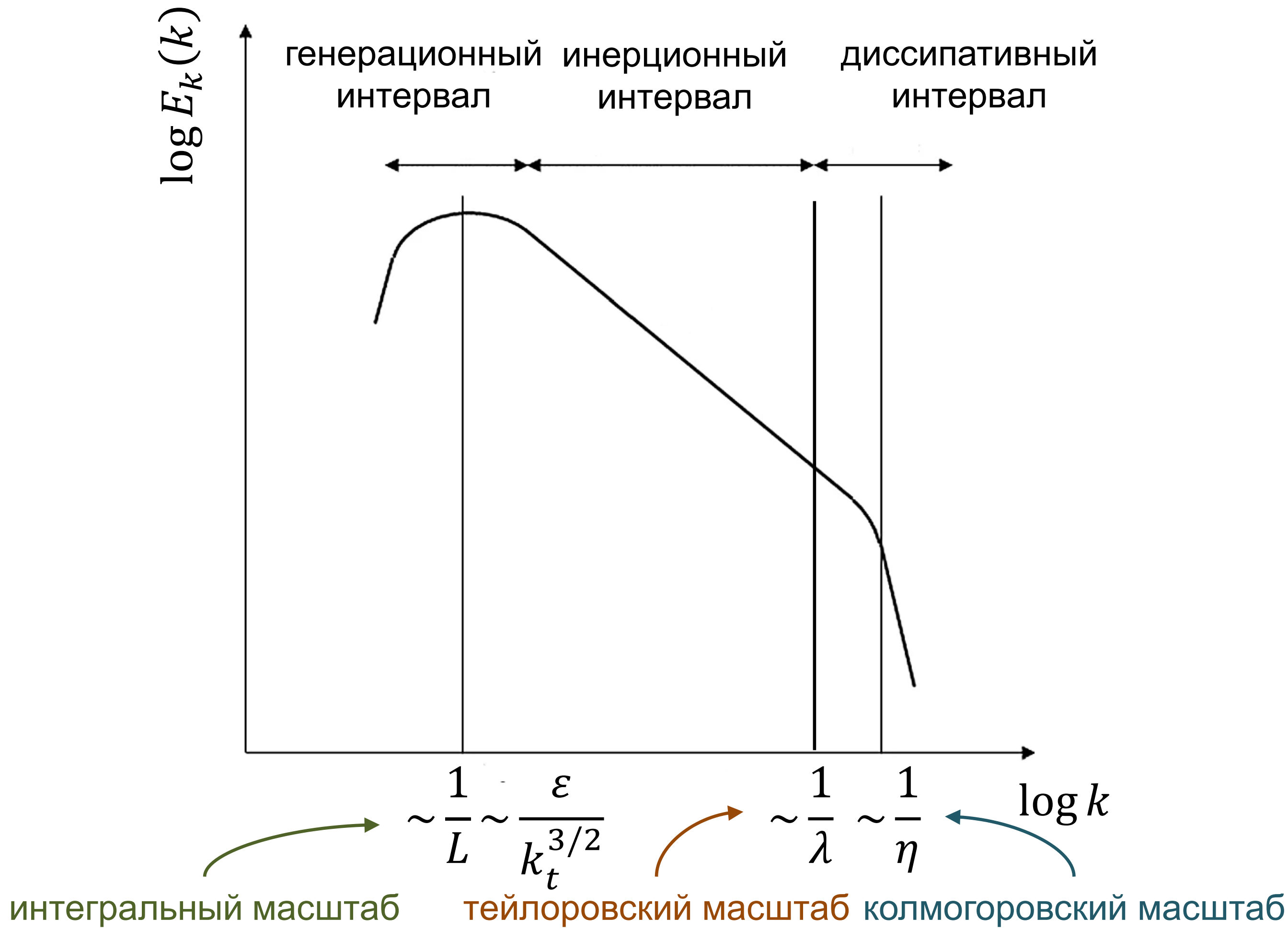
$$C_{2\varepsilon}^{*} = C_{1\varepsilon} + \frac{f_k}{f_\varepsilon}(C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon})$$

$$\sigma_{ku} = \frac{f_k^2}{f_\varepsilon}\sigma_k \,, \quad \sigma_{\varepsilon u} = \frac{f_k^2}{f_\varepsilon}\sigma_\varepsilon$$

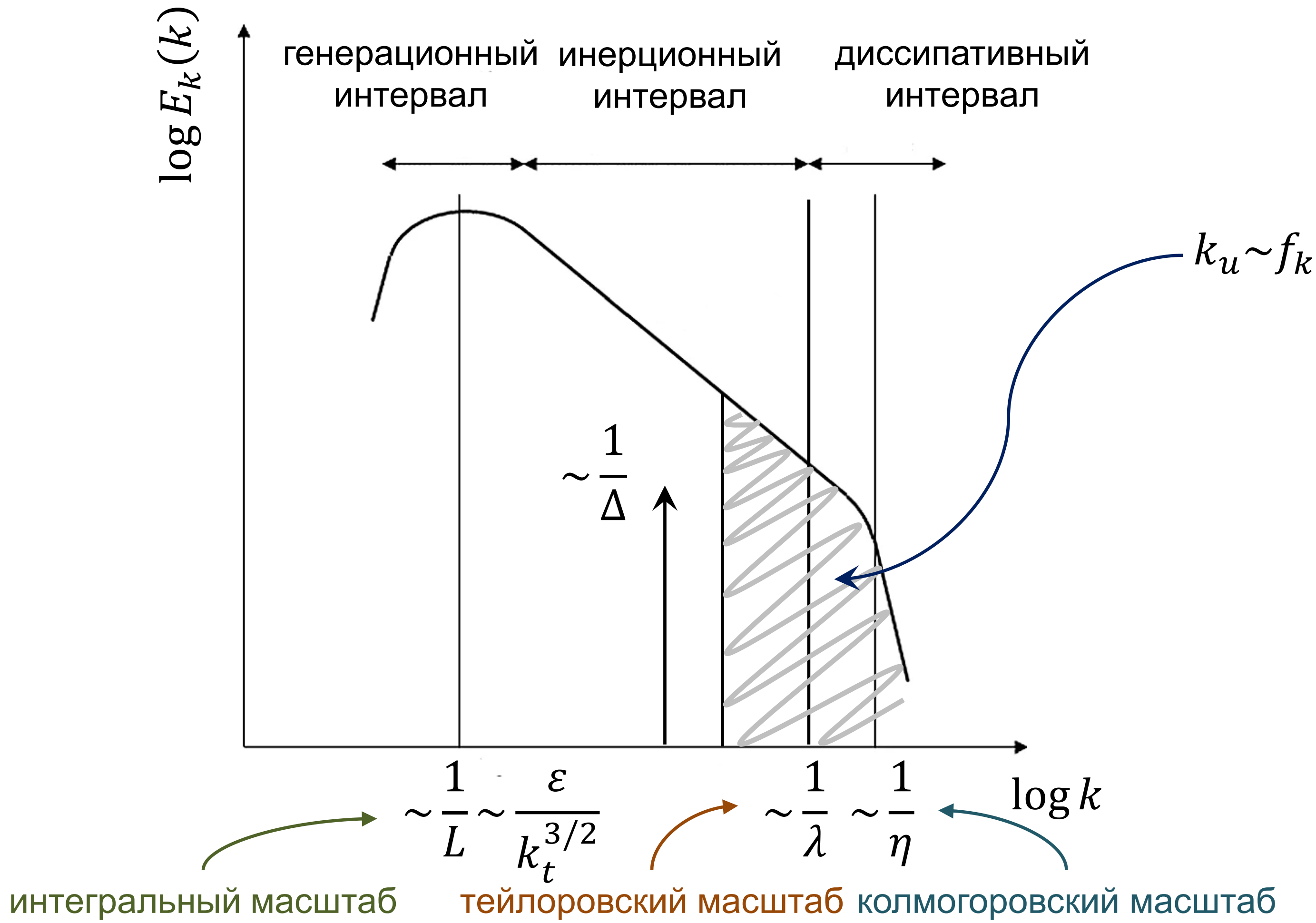
Константы стандартной k-ε модели

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: масштабы турбулентности



Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: масштабы турбулентности

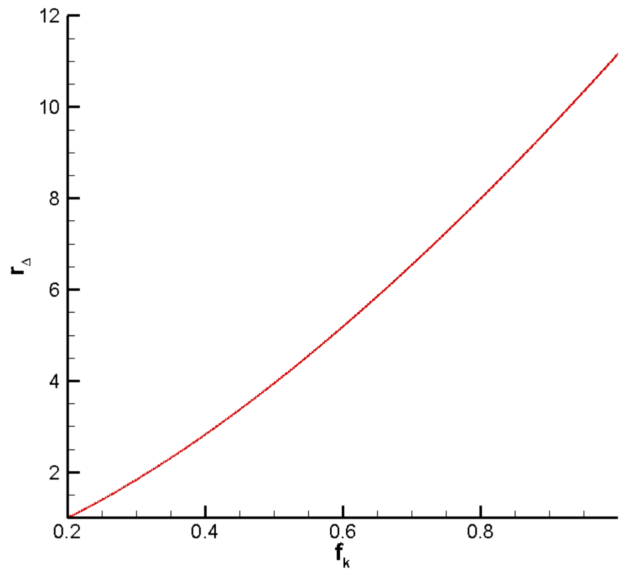


Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: оценка сеточного разрешения

$\Delta \leq l_r$, l_r - масштаб разрешаемых сеткой пульсаций

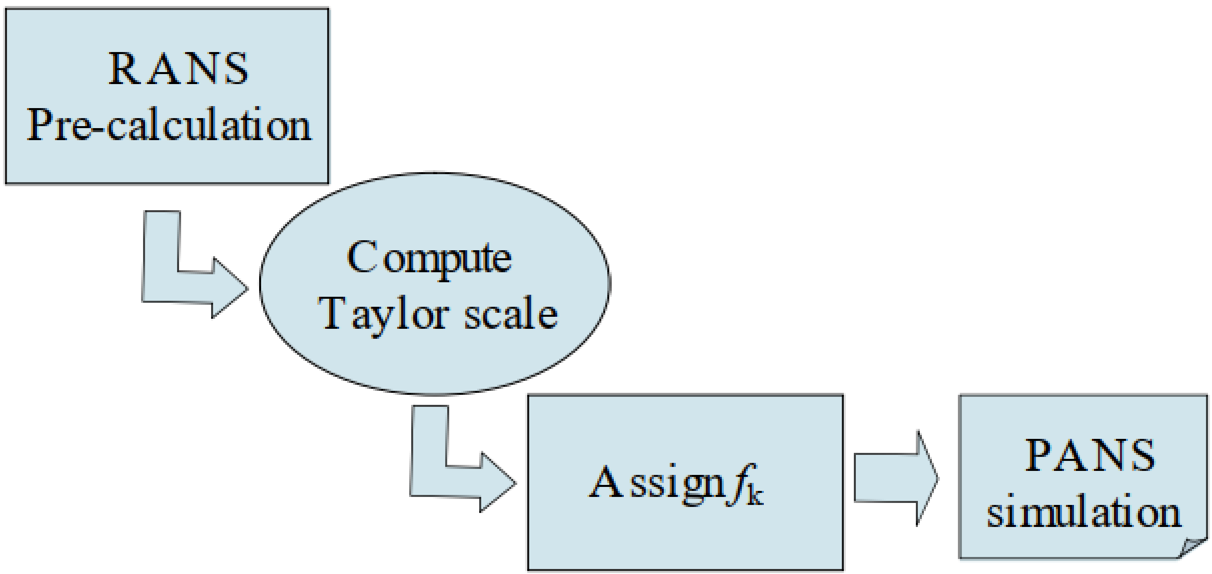
$$l_r \sim \left(\frac{\nu_u^3}{\varepsilon_u}\right)^{1/4}, \quad \nu_u = C_{\mu u} \, {k_u^2}/{\varepsilon_u}, \quad \Delta \sim C_{\mu u}^{3/4} f_k^{3/2} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon_u}$$

$$r_\Delta = \left(\frac{f_k}{f_k^{ref}}\right)^{3/2}, \quad f_k^{ref} = 0.2$$ (соответствует «хорошему» МКВ)



Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: определение параметра f_k

- Постоянное значение f_k
- Динамическое значение f_k



Klapwijk M., Lloyd T., Vaz G., On the accuracy of partially averaged Navier-Stokes resolution estimates, Int. J. of Heat and Fluid Flow, 80, 108484, 2019, doi: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.108484.

Численное решение системы частично усреднённых уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^a}{\partial x_i} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^t}{\partial x_i} + \boldsymbol{S}$$

- Линейная аппроксимация консервативных величин на грани ячеек с использованием TVD ограничителей
- Точное (итерационное) или приближённое (HLLC) решение задачи о распаде разрыва на гранях ячеек
- Интегрирование по времени: РК3
- Явно-неявное интегрирование по времени подсистемы с источником

Реализовано в программном комплексе NUT3D

Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П., Разностные схемы газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, Мат. модел., 7, 5, 15-25, 1995.

Вихрь Тейлора-Грина: постановка задачи

$$u_0 = V_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right)\cos\left(\frac{y}{L}\right)\sin\left(\frac{z}{L}\right)$$

$$v_0 = -V_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{y}{L}\right)\sin\left(\frac{z}{L}\right)$$

$$w_0 = 0$$

$$p_0 = P_0 + \frac{1}{16}\rho_0 V_0^2 \left(\cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2\right)$$

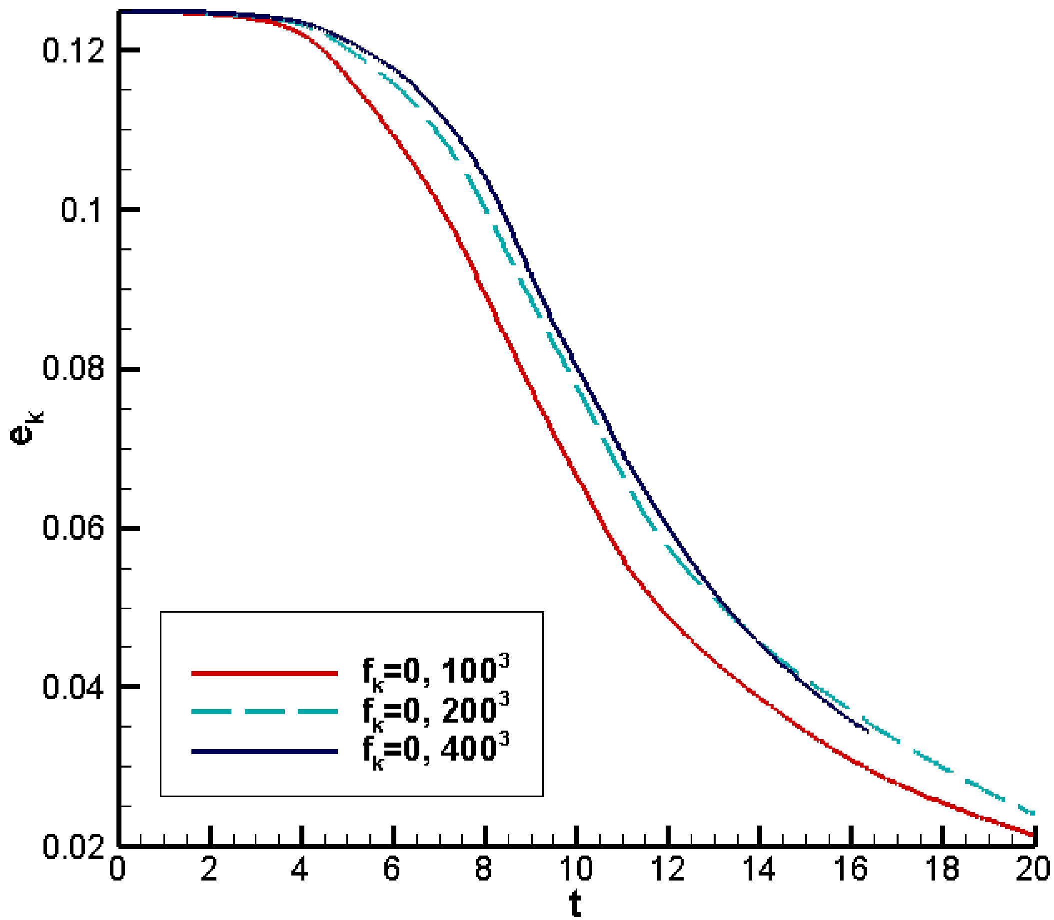
$$\rho = \rho_0 \, {}^{p_0}\!/_{P_0}$$

$$-\pi L \le x, y, z \le \pi L$$

$$\rho_0 = 1.178 \cdot 10^{-3} \quad V_0 = 10^4 \quad L = 1 \quad P_0 = 10^6 \quad \mu = 3.927 \cdot 10^{-3} \quad \gamma = 1.4$$

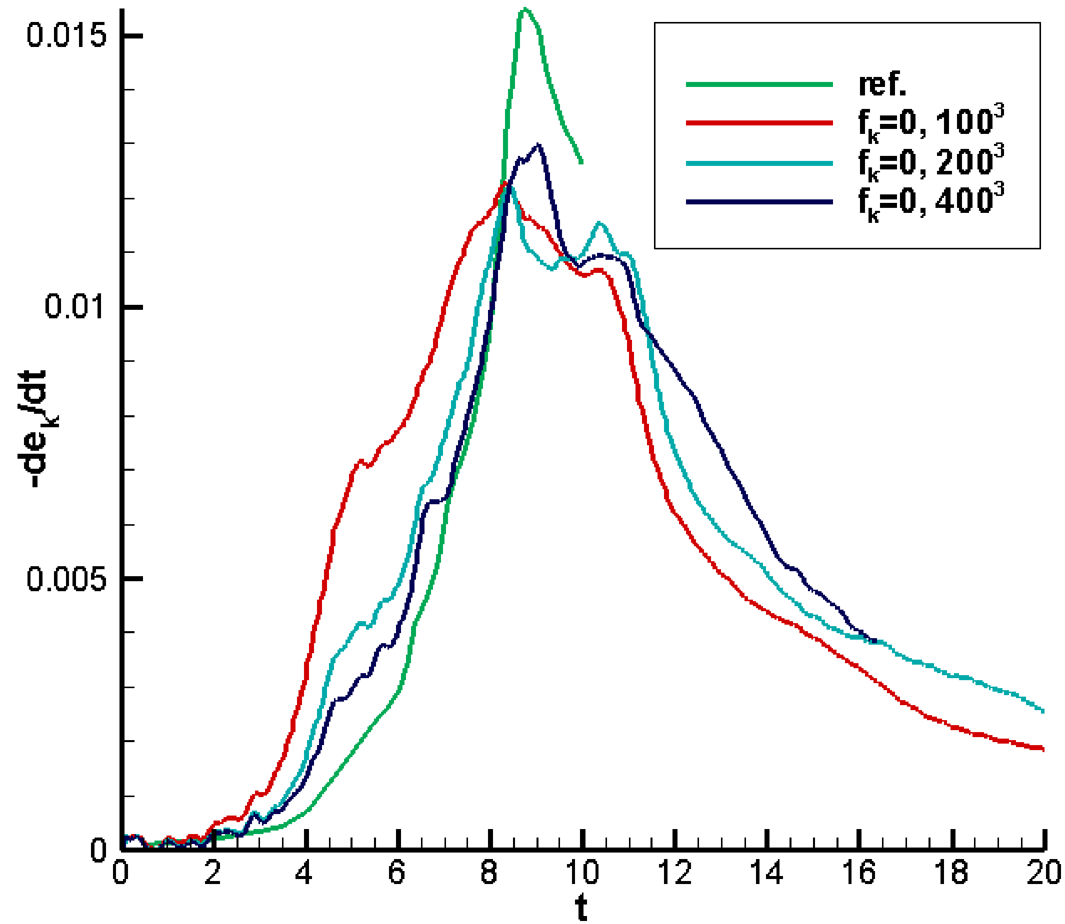
$$Re = \frac{\rho_0 V_0 L}{\mu} = 3000 \quad M_0 = \frac{V_0}{c_0} = 0.28$$

Вихрь Тейлора-Грина. Результаты без модели турбулентности



Зависимость полной кинетической энергии от времени

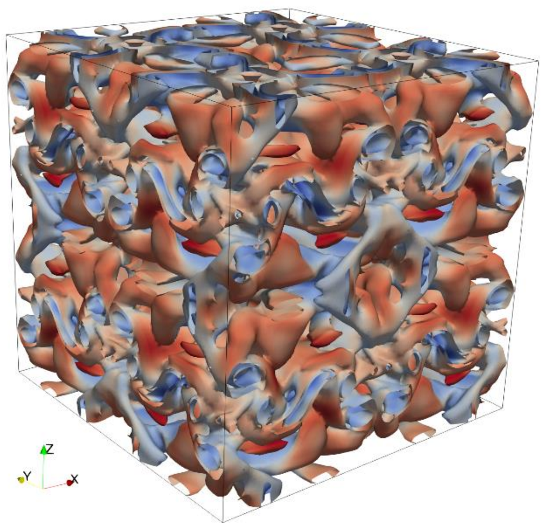
Вихрь Тейлора-Грина. Результаты без модели турбулентности



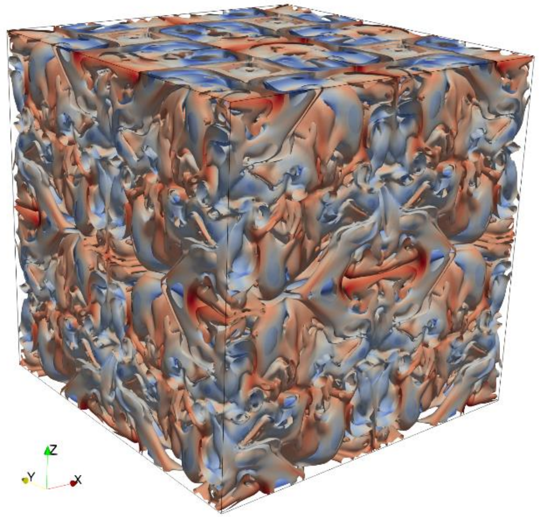
Зависимость диссипации кинетической энергии от времени

Вихрь Тейлора-Грина. Результаты без модели турбулентности

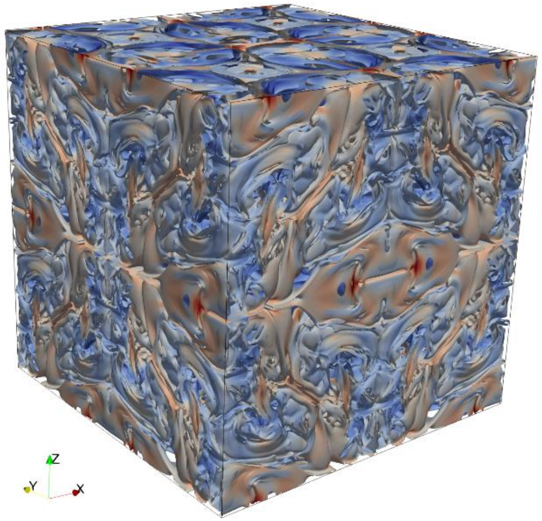
100^3



200^3



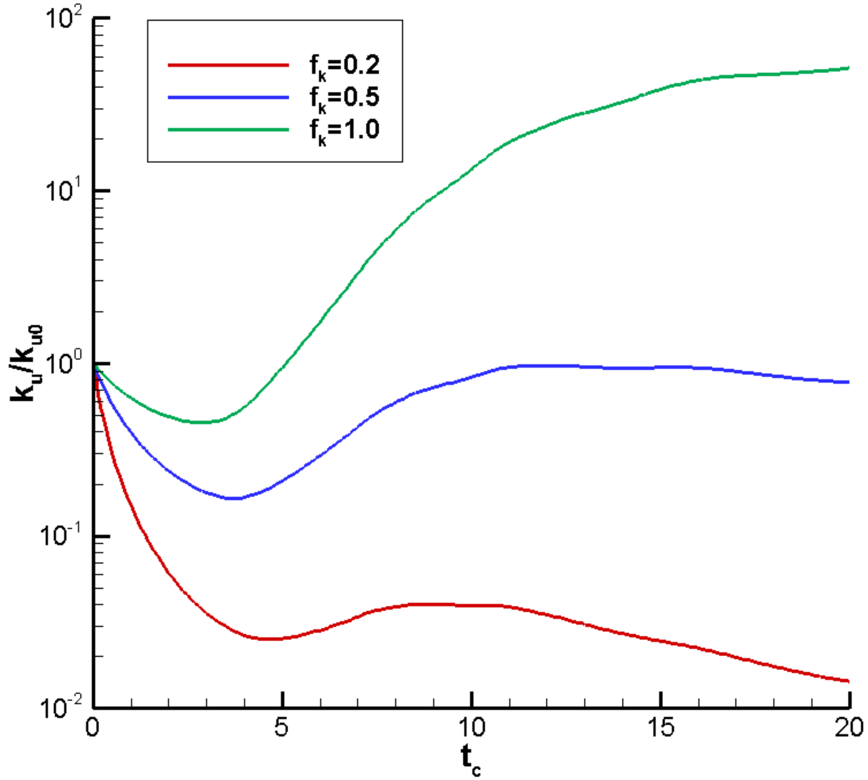
400^3



Изоповерхности амплитуды завихренности в момент времени $t_c = 16.4$, цветом обозначено значение плотности

Вихрь Тейлора-Грина. Результаты с моделью турбулентности

100^3



Временные зависимости отношения турбулентной кинетической энергии (неразрешаемые масштабы) к турбулентной кинетической энергии в начальный момент времени

Основные выводы и результаты

- Подход с частичным усреднением уравнений Навье-Стокса имеет теоретический потенциал для балансирования между вычислительной стоимостью расчёта и качеством получаемых результатов, особенно в случае динамически меняющихся значений параметров, контролирующих переход модели между предельными случаями.

- Однако с положительными свойствами гибридных методов увлекаются и негативные свойства базовых подходов, а именно, необходимость инициирования турбулентных пульсаций, определение граничных условий для турбулентных величин, отдельное описание поведения турбулентных величин вблизи стенок, калибровка моделей турбулентности для определения эмпирических констант и т.д. Большое количество сделанных допущений при получении системы уравнений затрудняет контроль области их применимости.

- Отдельного рассмотрения в рамках частично усредненных уравнений Навье-Стокса требуют замыкающие термодинамические соотношения и транспортные коэффициенты.

Спасибо за внимание