

СИЛЬНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ, ДВИЖУЩИЕСЯ ПО
СТЕПЕННЫМ ЗАКОНАМ К ЦЕНТРУ
ИЛИ К ОСИ СИММЕТРИИ

КРАЙКО А.Н., ВАЛИЕВ Х.Ф.
ЦИАМ им. П.И. Баранова, Москва, Россия

Международная конференция
«XVI Забабахинские научные чтения» (ЗНЧ-2023)

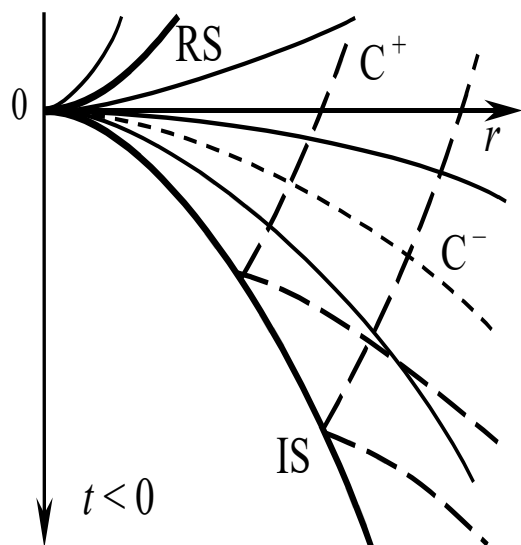
29 мая – 2 июня 2023 г.
Снежинск

1. **Guderley G.** Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. **1942. 19** (9). 302-312.
2. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, **1986**.
3. **Крайко А.Н., Тилляева Н.И.** Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // ТВТ. **1998. 36** (1). 120-128 .
4. **Валиев Х.Ф.** Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. **2009. 73** (3). 397–407.
5. **Валиев Х.Ф., Крайко А.Н.** Цилиндрически и сферически симметричное быстрое сильное сжатие идеального совершенного газа с показателями адиабаты от 1.001 до 3 // ПММ. **2011. 75** (2). 314–326.
6. **Крайко А.Н.** Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс, **2010**.
7. **Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., Якимова М.Н.** Динамическое сжатие холодного газового шара // Доклады РАН. **2015. 461** (5). 530–532.
8. **Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., Якимова М.Н.** Ударная волна в газовом шаре // Вестник ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. **2016. 9** (1). 5-19.
9. **Куропатенко В.Ф., Магазов Ф.Г., Шестаковская Е.С.** Аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в газе в одномерном случае // Вестник ЮУрГУ. Математика. Механика. Физика. **2017. 9** (4). 52-58.

Автомодельное решение К. Гудерлея (1)

$$\tau = \frac{Ct}{r^k}, \quad n = \frac{1}{k}, \quad u = n \frac{r}{t} U, \quad a = n \frac{r}{t} A, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \rho_0 n^2 \frac{r^2}{t^2} P, \quad P = \frac{A^2}{\gamma}$$

U , A и R – функции τ , определяемые решением задач Коши для ОДУ:



$$\frac{dA}{dU} = \frac{Af_2}{2(1-U)f_1}, \quad \frac{d\tau}{dU} = \gamma \frac{\tau f}{f_1}, \quad \frac{d \ln R}{dU} = \frac{f_3}{(1-U)f_1}$$

$$f_1 = \gamma(1-U)(1-nU)U + (2-2n-\nu\gamma nU)A^2$$

$$f = (1-U)^2 - A^2, \quad f_3 = \nu\gamma nUf - f_1$$

$$f_2 = (\gamma-1)f_1 - \gamma[\nu(\gamma-1)nU - 2(1-nU)]f$$

$$\tau_{IS} = \frac{Ct}{r^k} \rightarrow D = \frac{dr}{dt} = n \frac{r}{t}, \quad U_{IS} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad A_{IS} = -\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}, \quad R_{IS} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$U(0) = A(0) = 0$$

Автомодельное решение К. Гудерля (2)

$$U_{IS} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad A_{IS} = -\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}{\gamma + 1}$$

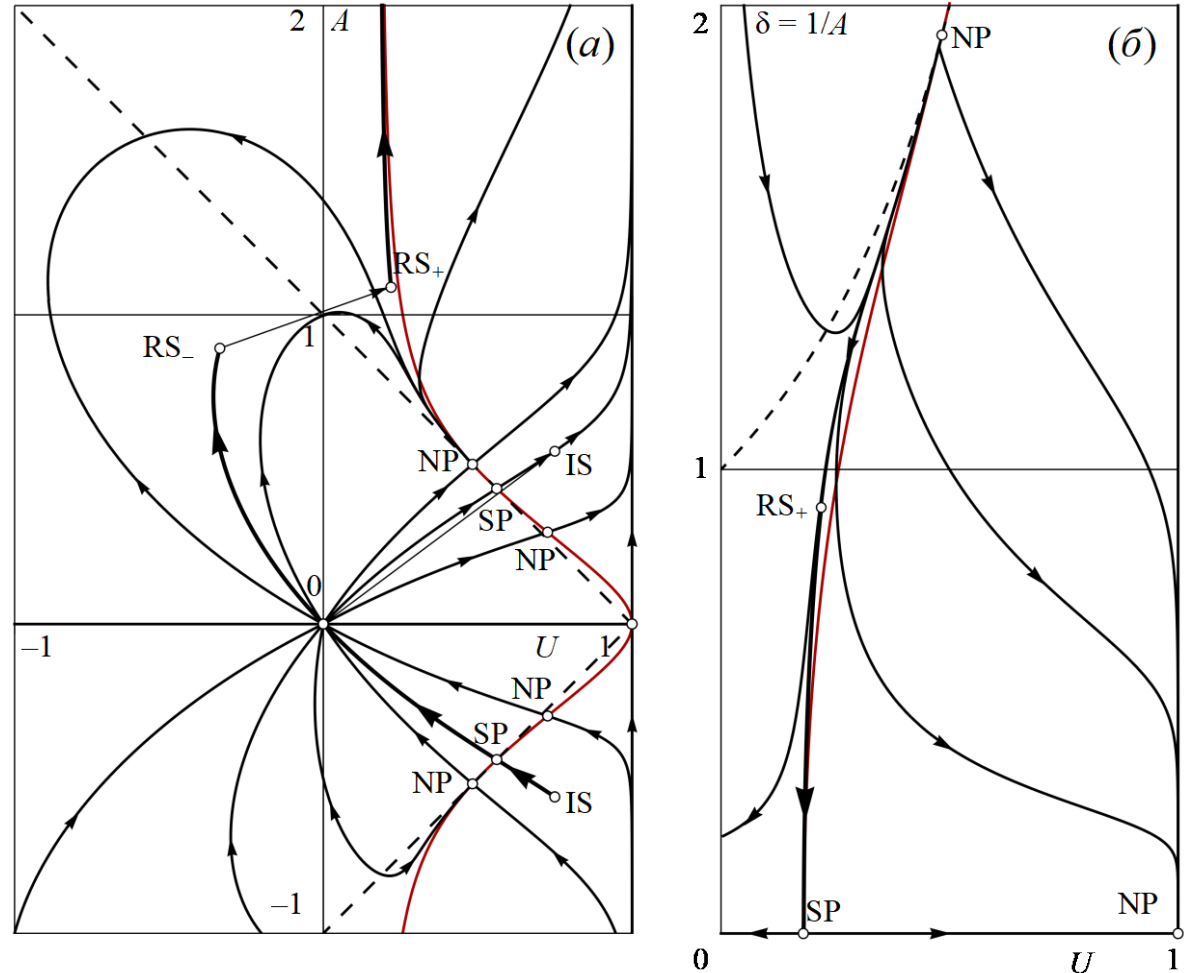
$$U(0) = A(0) = 0$$

$$\tau = \frac{Ct}{r^k}, \quad \frac{dA}{dU} = \frac{Af_2}{2(1-U)f_1}$$

$$f = 0 \rightarrow 1 = U \pm A \rightarrow \frac{dr}{dt} = u \pm a$$

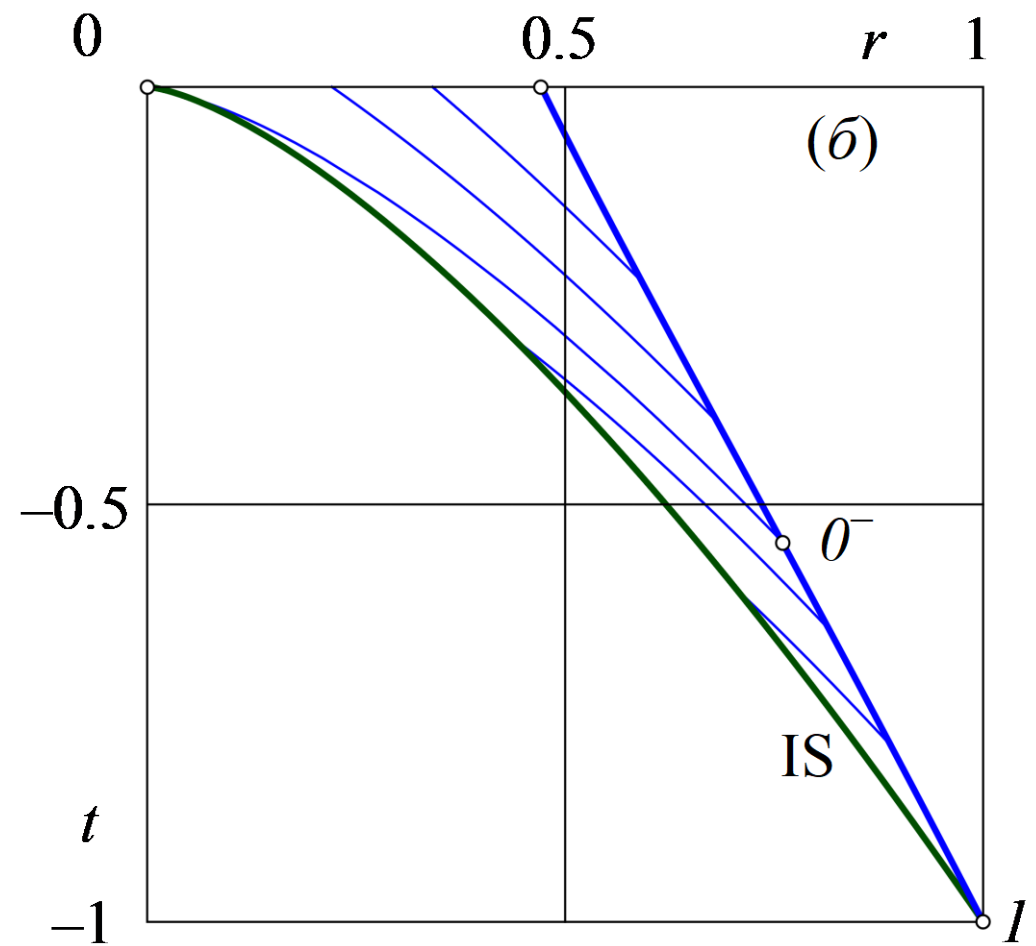
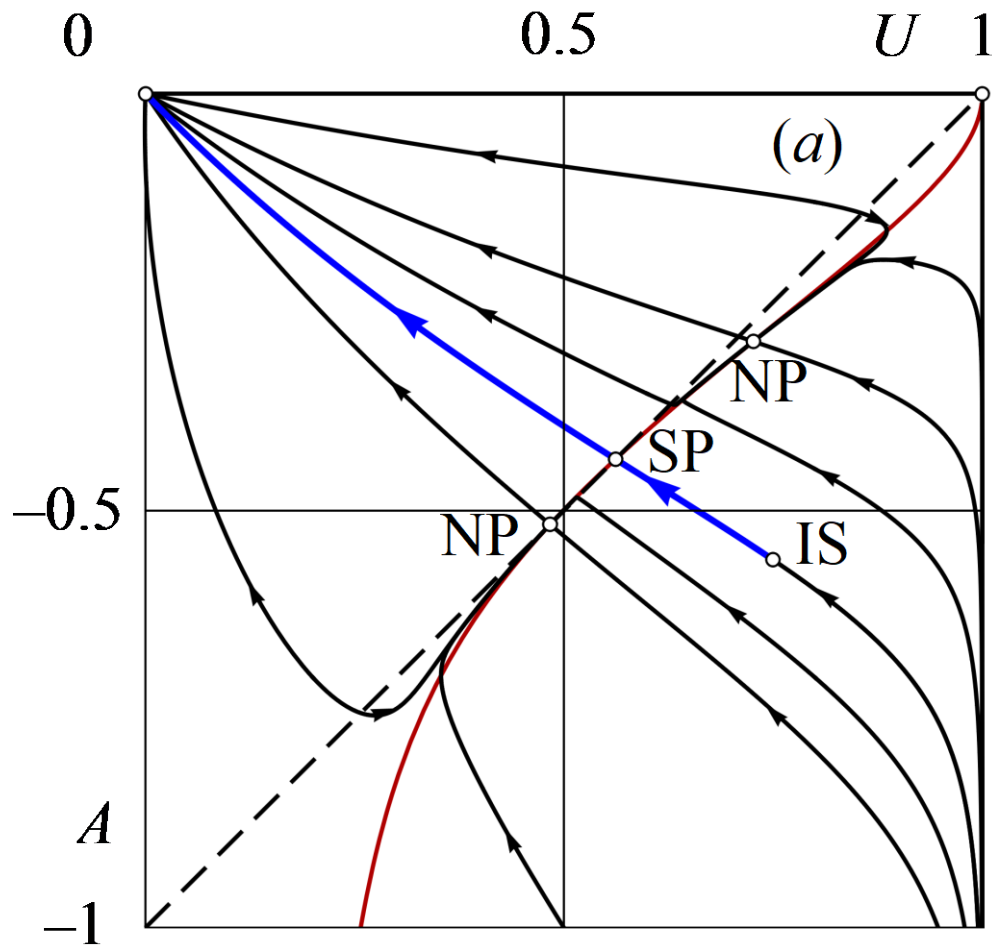
$$f_1 = 0 \rightarrow f_2 = 0, \quad n = n_*(v, \gamma)$$

$$A \gg 1, \quad \delta = \frac{1}{A}$$



$$v = 3, \quad \gamma = 5/3, \quad n = n_* = 0.688377$$

Автомодельное решение К. Гудерля (3)



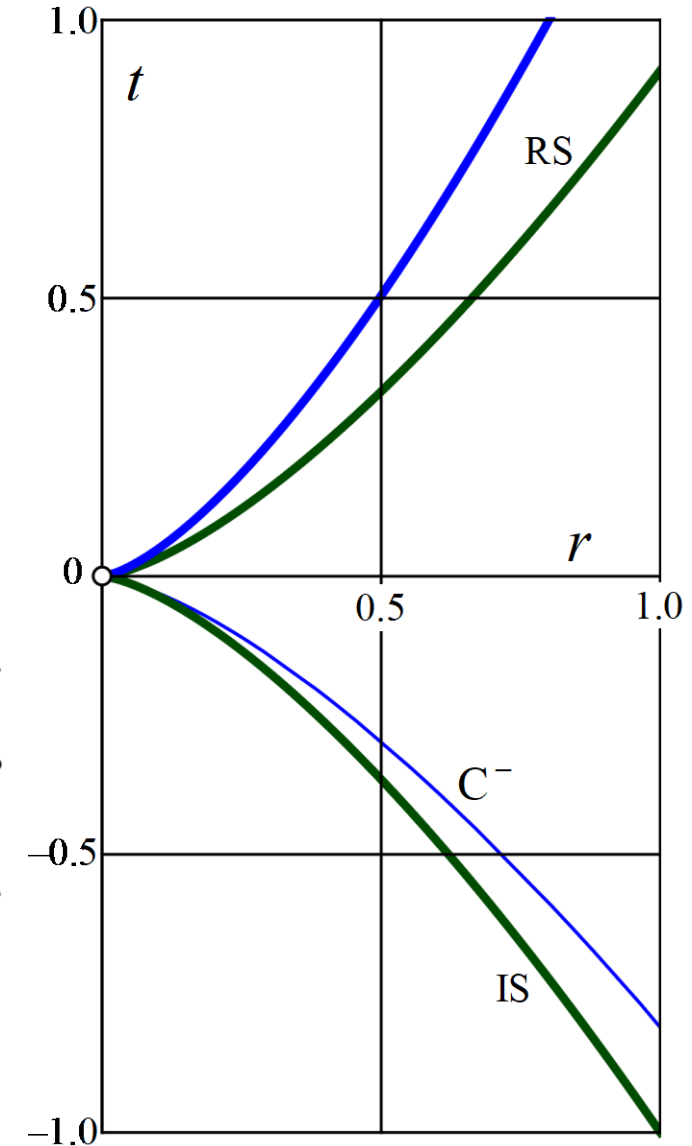
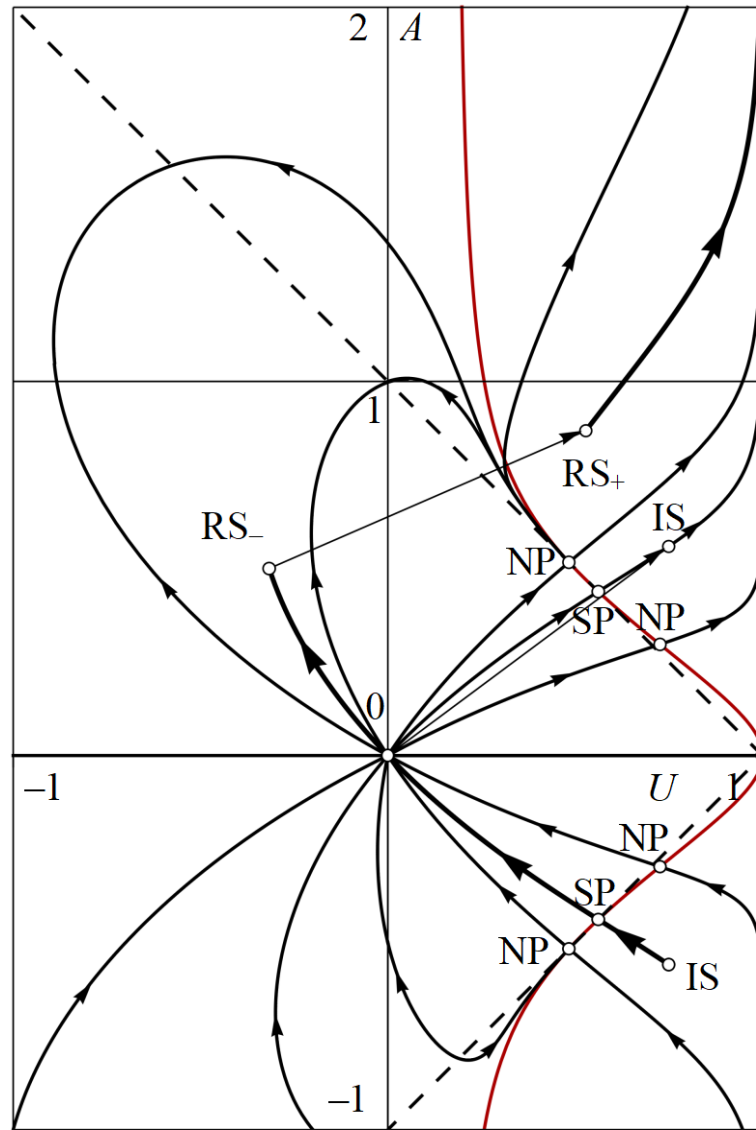
$$\nu = 3, \gamma = 5/3, n = n_* = 0.688377$$

**Автомодельные
решения
с поршнем,
расширяющимся
из ЦС при $n = n_*$**

$$\nu = 3, \gamma = 5/3,$$

$$\nu n = n_* = 0.688377,$$

$$U_- \approx -0.32, A_- = 0.5$$



В. Куропатенко искал решения разделением переменных

$$\xi = \frac{Cm}{(-t)^l}, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 \delta(\xi), \quad r^{v-1}u = r_1^{v-1}u_1 \frac{\text{Жт}}{\text{Жт}} \frac{\text{л}}{\text{л}} Z(\xi), \quad r^v = r_1^v \frac{\text{Жт}}{\text{Жт}} \frac{\text{л}}{\text{л}} X(\xi), \quad \frac{1}{t_1} = v \frac{\gamma+1}{2lr_1} u_1$$

m – массовая лагранжева переменная, δ , Z и X – решение задачи Коши («штрих» – производная по ξ):

$$\xi \text{ i } 1: G\delta\check{y} = H, \quad GZ\check{y} = \frac{\gamma-1}{2\delta^2} \xi H, \quad \xi X\check{y} = X - \frac{2Z}{\gamma+1}, \quad G = \frac{\gamma\delta^{\gamma-1} X^{2-2/v}}{\xi^{2/l-2/v}} - \frac{\gamma-1}{2\delta^2} \xi^2 \quad (1)$$

$$H = 2 \frac{(v-l)\delta^\gamma X^{2-2/v}}{v l \xi^{1+2/l-2/v}} - \frac{l-1}{l} Z + \frac{2(v-1)Z^2}{v(\gamma+1)X}, \quad \delta(1) = Z(1) = X(1) = 1$$

$$l_* < l \text{ J } l^m = \frac{3(\gamma+1)v}{4-v+(v+2)\gamma}, \quad \xi_{0^*} > 1, \quad G_{0^*} = 0, \quad H_{0^*} \neq 0$$

$$0 < l = l_* = vn_*(v, \gamma) < l^m, \quad \xi_* > 1, \quad G_* = 0, \quad H_* = 0$$

Решения В. Куропатенко, совпадающие с решением К. Гудерля:

$$l_* = vn_*(v, \gamma) < l^m, \xi_* > 1, G_* = 0, H_* = 0, v = 3: \gamma = 1.1, l_* = 2.3879 < l^m = 2.9077$$

$$\gamma = 1.2, l_* = 2.2714 < l^m = 2.8286; \gamma = 4/3, l_* = 2.1831 < l^m = 2.7391$$

$$\gamma = 7/5, l_* = 2.1515 < l^m = 2.7; \gamma = 5/3, l_* = 2.0651 < l^m = 2.5714$$

Решения В. Куропатенко, отличные от решения К. Гудерля:

$$\xi_{0*} > 1, G_{0*} = 0 \text{ Ъ} \frac{dx}{dt} = u - a, H_{0*} \text{ №0 } \textcircled{R} \xi = \xi_{0*} + D\xi$$

$$\delta = \delta_{0*} + D\delta, Z = Z_{0*} + DZ, X = X_{0*} + DX \textcircled{R}$$

$$D\xi = \frac{\gamma^2 - 1}{4\delta_{0*}^3 H_{0*}} (\xi_{0*} D\delta)^2$$

$$DZ = \frac{\gamma - 1}{2\delta_{0*}^2} \xi_{0*} D\delta, DX = \frac{X_{0*}}{\gamma + 1} - \frac{2Z_{0*}}{\xi_{0*}} \frac{D\xi}{\xi_{0*}}$$

Автомодельные решения В. Куропатенко для $1 > n > n_*$

Для $1 > n > n_*$ вышедшая из точки IS ИК приходит на «звуковую» прямую в точке 0_* . В плоскости rt этому отвечает выход с траектории поршня огибающей C^- -характеристик (штрихового отрезка 0_*-0).

$$\frac{dA}{dU} = \frac{Af_2}{2(1-U)f_1}$$

$$\frac{d\tau}{dU} = \gamma \frac{\tau f}{f_1}$$

$$0_*-0: f_{0_*} =$$

$$= (1-U)_{0_*}^2 - A_{0_*}^2 = 0$$

$$f_1(U_{0_*}, A_{0_*}) \neq 0$$



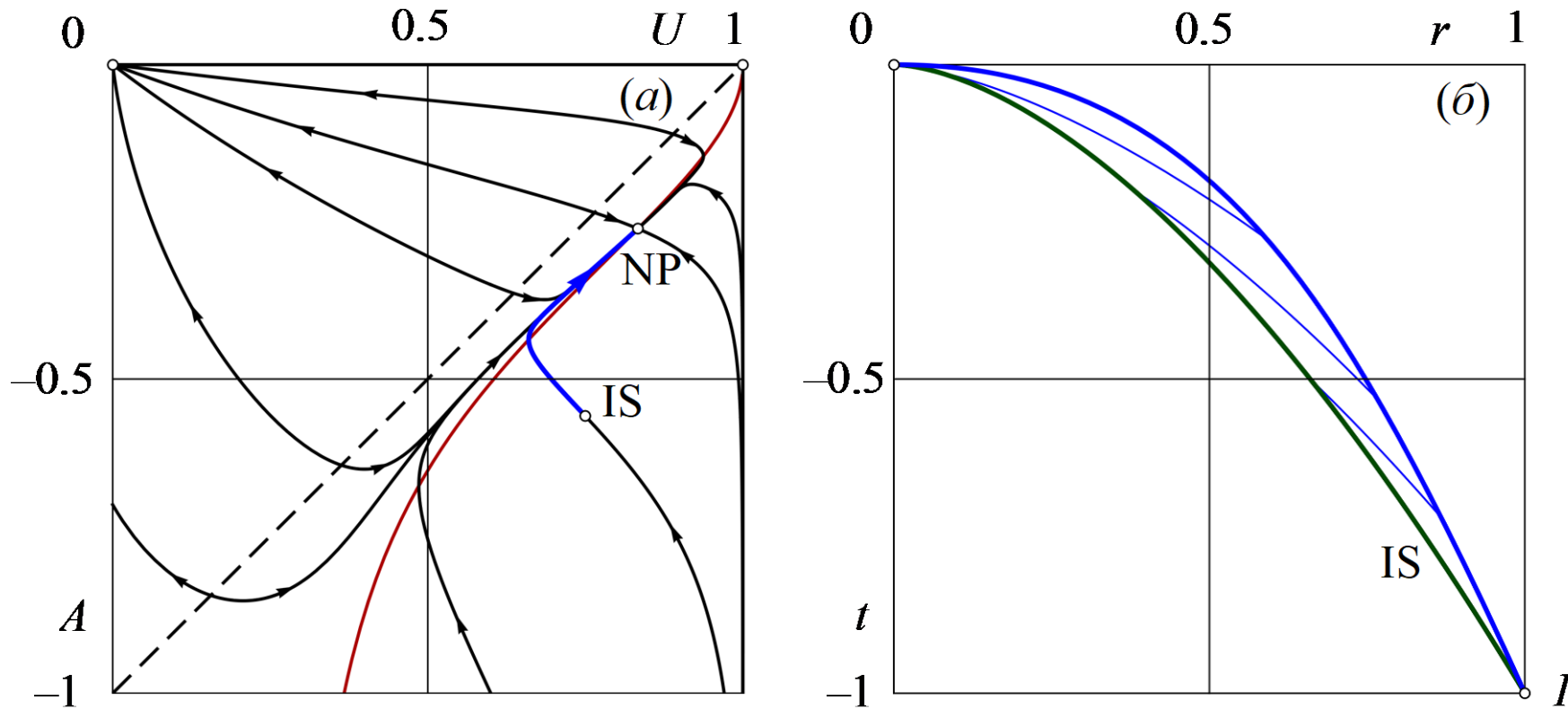
$$\nu = 3, \gamma = 5/3, n = 0.8 > n_* = 0.688377$$

Изложенное выше не означает, что УВ с уравнением $r = r_1(t/t_1)^{l/v}$ при показателе степени $l > l_*(v, \gamma) = vn_*$ дойдёт до оси или центра симметрии (далее, ЦС). При $l > l_*$ этого не происходит из-за того, что при некотором $\xi_{0*} > 1$ решение задачи (1) приводит к обращению в нуль множителя G_{0*} при отличной от нуля функции H_{0*} . В силу равенства $G_{0*} = 0$ наклон идущей в ЦС кривой $Sm = \xi_{0*}(-t)^l$ в каждой точке равен наклону S^- -характеристики. Однако при $H_{0*} \neq 0$ на ней не выполняется условие совместности, и получившаяся кривая – не характеристика, а огибающая S^- -характеристик. Появление огибающей – свидетельство возникновения неавтомодельной УВ, которая, догнав автоматодельную УВ до её прихода в ЦС, ограничивает в плоскости m, t или r, t область решений [7-9]. Возникшая при $l > l_*$ движущаяся по холодному газу неавтомодельная УВ в малой окрестности ЦС становится автоматодельной УВ решений [1-9] с $l = l_*(v, \gamma)$.

Автомодельные решения В. Куропатенко

для $0 < n_0 = 2/[2 + v(\gamma - 1)] < n < n_*$

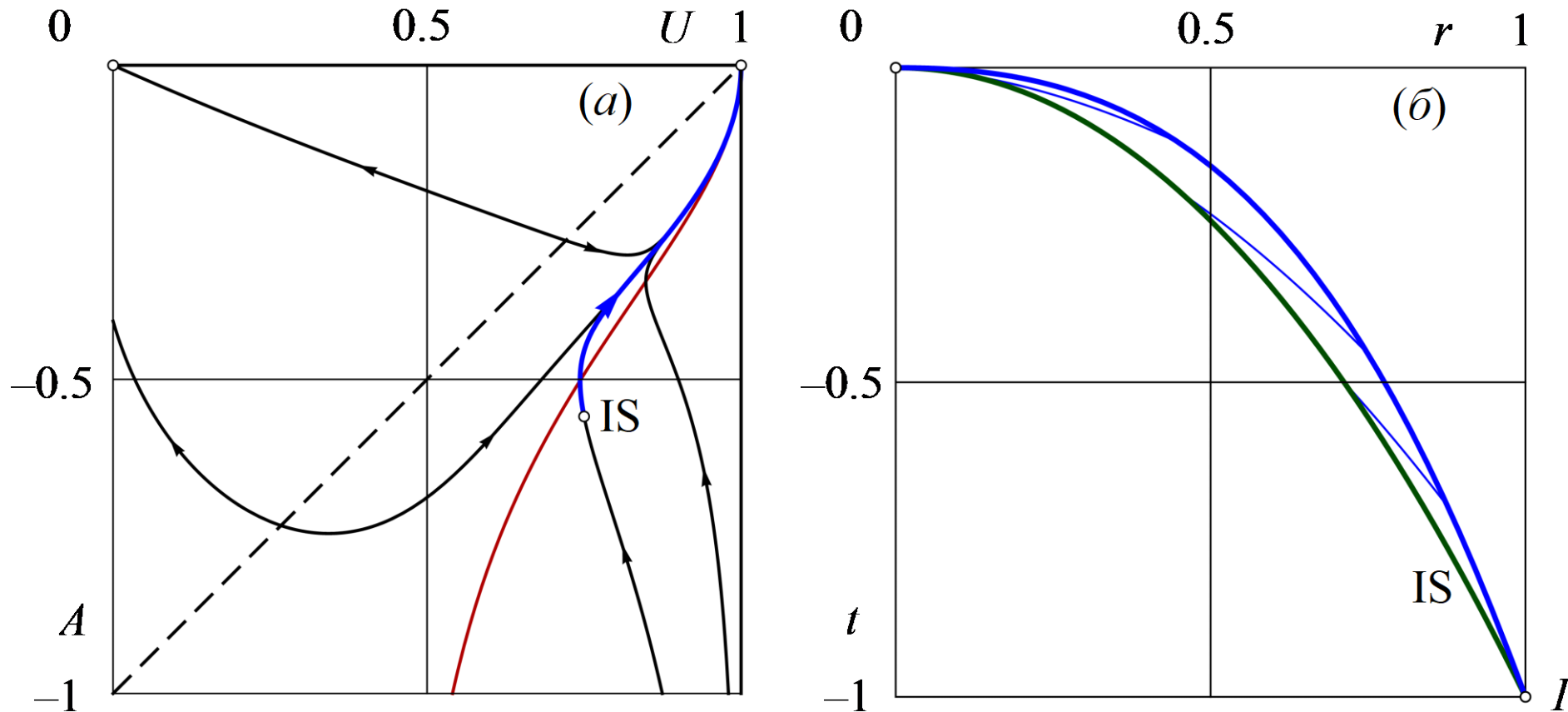
ОТ при $0 < n < n_*$ на отрезке $0 < U < 1$ нижней «звуковой» прямой $A = U - 1$ нет, но при $n_0 < n < n_*$ есть ОТ («узел») под этим отрезком с $r = t = 0$.



$$v = 3, \gamma = 5/3, n_0 = 0.5 < n = 0.6 < n_* = 0.688377$$

Автомодельные решения В. Куропатенко для $0 < n < n_0 < n_*$

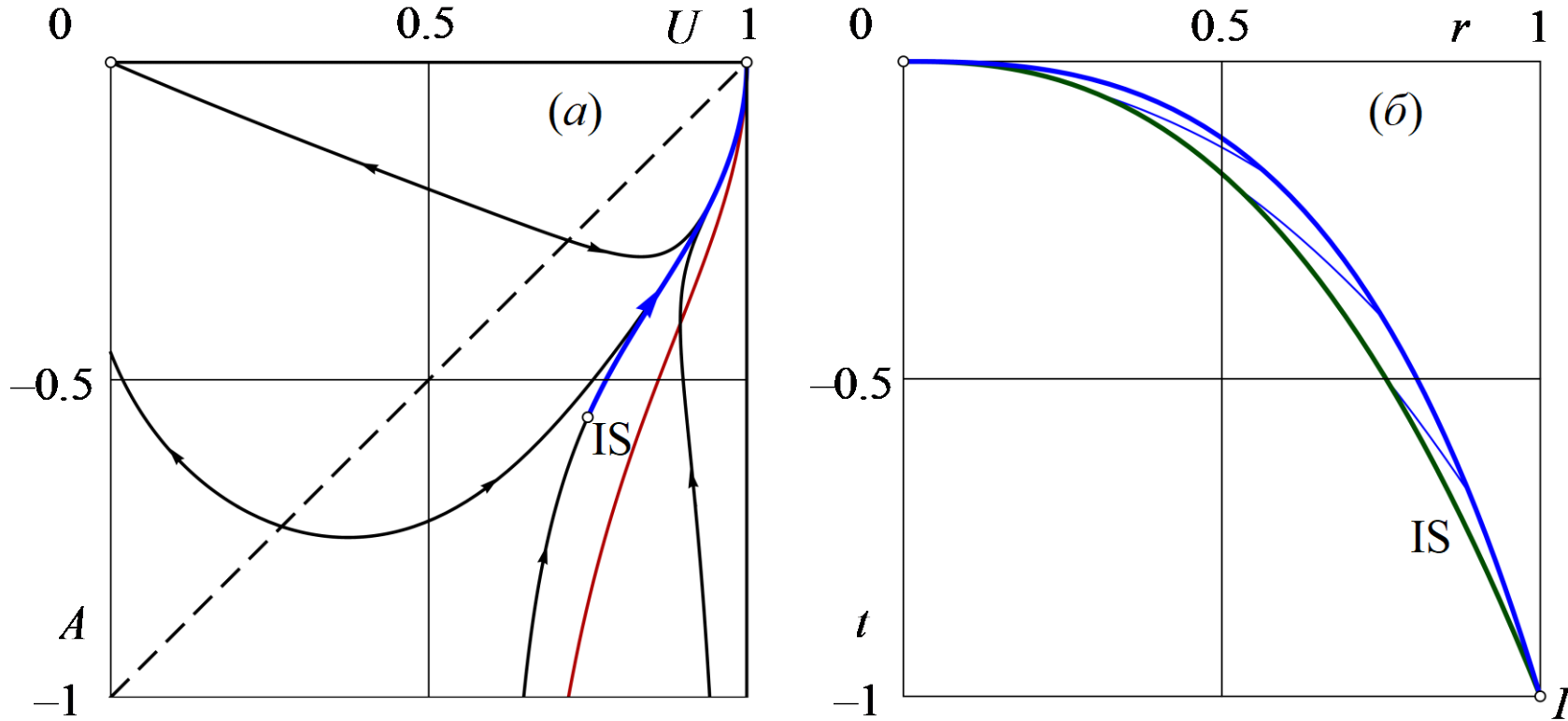
При $n_0 < n < n_*$ на отрезке $0 < U < 1$ нижней «звуковой» прямой $A = U - 1$ и под ним ОТ нет. ИК приходят в ОТ: $U = 1, A = 0$ с $r = t = 0$.



$$\nu = 3, \gamma = 5/3, n = 0.49 < n_0 = 0.5 < n_* = 0.688377$$

Автомодельные решения В. Куропатенко для $0 < n < n_0 < n_*$

ОТ при $0 < n < n_0 < n_*$ нет на отрезке $0 < U < 1$ нижней «звуковой» прямой $A = U - 1$ и под ним. ИК приходят в ОТ $U = 1, A = 0$ с $r = t = 0$.



$$v = 3, \gamma = 5/3, n = 0.4 < n_0 = 0.5$$



Центральный институт
авиационного моторостроения
имени П.И. Баранова

Благодарю за внимание!

E-mail: akraiko@ciam.ru

111116, Россия, Москва,
ул. Авиамоторная, 2
www.ciam.ru

Тел.: +7 (499) 763 57
47
E-mail: info@ciam.ru