М. И. Авраменко

О k-ε модели турбулентности

2-е издание, переработанное и дополненное

Издательство РФЯЦ — ВНИИТФ

Снежинск • 2010

УДК 532.517.3
ББК 22.311

А21

Авраменко, М. И.

А21 О k–ε модели турбулентности. — 2-е изд., перераб. и дополн. — Снежинск: Изд-во РФЯЦ — ВНИИТФ, 2010. — 102 с.

ISBN 978-5-902287-43-6

В книге рассматривается применение $k-\varepsilon$ модели турбулентности для описания достаточно широкого класса течений, включающих как гравитационную, так и сдвиговую турбулентность. Приводятся аналитические решения уравнений $k-\varepsilon$ модели для ряда характерных частных случаев, позволяющие сделать оценку эмпирических констант модели.

Рассмотрена задача о взаимодействии турбулентности с ударными волнами, демонстрирующая неприменимость стандартного варианта $k-\varepsilon$ модели для описания взаимодействия ударных волн с турбулентностью, связанную с нефизично большим ростом турбулентных величин в ударном скачке. Обсуждаются возможные изменения модели для устранения данного дефекта.

УДК 532.517.3
ББК 22.311

ISBN 978-5-902278-43-6

Оглавление

Введение 5

1. Уравнения k–ε модели 7

1.1. Переход к развитой турбулентности 7

1.2. Осреднение уравнений газовой динамики 9

1.3. Замыкание уравнений для осредненных величин 14

1.4. Сводка уравнений k–ε модели 17

1.5. Баланс энергии 22

1.6. Турбулентный поток тепла 23

2. Оценка эмпирических констант для простейших течений 25

2.1. Затухание однородной турбулентности 26

2.2. Эволюция однородной турбулентности при быстром однородном сжатии 29

2.3. Турбулентный пограничный слой 30

2.4. О турбулентном числе Шмидта и Прандтля 33

3. Сдвиговое турбулентное перемешивание 35

3.1. Автомодельная задача о сдвиговом турбулентном перемешивании 35

3.2. Решение в приближении средних по зоне турбулентных величин, случай равных плотностей смешивающихся жидкостей 38

3.3. Оценка эмпирических констант сдвиговой турбулентности 41

3.4. Приближенное решение с учетом профилей турбулентных величин 46

4. Гравитационное турбулентное перемешивание 55

4.1. Автомодельная задача о перемешивании несжимаемых жидкостей в постоянном поле тяжести 55

4.2. Решение в приближении средних по зоне турбулентных величин 60

4.3. Оценка эмпирических констант
гравитационной турбулентности 63

4.4. Случай зависящего от времени ускорения 66

4.5. Смена фазы неустойчивости на устойчивость 68

5. Описание турбулентности, индуцируемой
неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова 74

5.1. Приближенное решение задачи
о развитии зоны перемешивания
при неустойчивости Рихтмайера–Мешкова 74

5.2. Начальные условия для турбулентных величин 79

5.3. Асимптотика турбулентных величин
вблизи границ зоны перемешивания
при степенной зависимости ширины зоны от времени 82

6. Эволюция турбулентности при прохождении ударных волн 84

6.1. Об описании взаимодействия ударных волн
с турбулентностью в рамках стандартной k–ε модели 84

6.2. Об адаптации k–ε модели для течений с ударными волнами 87

Заключение 96

Приложения 98

1. Обзор экспериментов по определению
постоянной скорости роста зоны турбулентного перемешивания
при гравитационной неустойчивости 98

2. Обзор результатов прямого численного моделирования
по определению постоянной скорости роста зоны турбулентного
перемешивания при гравитационной неустойчивости 105

Список использованных источников 111

Введение

$k-\varepsilon$ модель является, видимо, наиболее удачной моделью турбулентности первого уровня замыкания, когда цепочка уравнений для корреляций турбулентных величин обрывается на уравнениях для корреляций первого порядка. Для описания турбулентных величин в ней используется система двух нелинейных диффузионных уравнений — для массовой плотности турбулентной энергии k и скорости диссипации турбулентной энергии ε. Простейший вариант данной модели был предложен более тридцати лет тому назад в работах Лаундера и Сполдинга [1]. С тех пор $k-\varepsilon$ модель широко применялась для расчетов большого круга задач, в основном для описания сдвиговой несжимаемой турбулентности (см., например, [2]).

В качестве прецедента учета гравитационной (конвективной) турбулентности можно указать применение $k-\varepsilon$ модели для расчетов профилей ветра, температуры и коэффициентов турбулентной диффузии в атмосферном пограничном слое различной стратификации (см., например, [3, 4]). При этом эмпирические константы данного варианта модели несколько отличаются от устоявшегося варианта констант [2], подобранного для описания сдвиговых течений. К тому же, для описания профилей величин в приземном атмосферном слое требуется использование несколько разных эмпирических констант в случае устойчивой и неустойчивой стратификации. Еще более значительное отличие эмпирических констант модели от устоявшегося набора было предложено в работе [5], посвященной применению $k-\varepsilon$ модели к расчету автомодельного гравитационного перемешивания двух несжимаемых жидкостей.

Довольно ясно, что возможности $k-\varepsilon$ модели для описания сложных турбулентных течений ограничены. Тем не менее, ввиду относительной простоты этой модели, кажется привлекательным иметь ее вариант, который бы обеспечил приемлемое описание достаточно широкого круга течений. Основным рассматриваемым в данной работе вопросом является адаптация $k-\varepsilon$ модели для описания развитых турбулентных течений, возникающих в результате развития гидродинамических неустойчивостей вблизи контактных границ различных сред, приводящих к их турбулентному перемешиванию. Базовыми типами данных неустойчивостей являются: сдвиговая неустойчивость (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца), гравитационная неустойчивость (неустойчивость Рэлея–Тэйлора), а также неустойчивость Рихтмайера–Мешкова.

В книге дается обзор имеющихся источников для оценки эмпирических констант модели. Для этого рассматриваются аналитические решения уравнений $k-\varepsilon$ модели для ряда характерных частных случаев, позволяющие сделать оценку эмпирических констант путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными либо с точными результатами теории турбулентности или результатами прямого численного моделирования. Данный анализ проводится аналитически, без привлечения численного решения $k-\varepsilon$ уравнений, что делает его более ясным.

В последнем разделе обсуждается возможность адаптации $k-\varepsilon$ модели для моделирования течений при наличии ударных волн. Рассмотрен ряд изменений модели, которые необходимо сделать для описания взаимодействия ударных волн с зоной турбулентного перемешивания вблизи контактных границ различных сред.

Первоначально данная работа возникла как «шпаргалка» по вопросам применимости $k-\varepsilon$ модели к интересующим автора задачам. Как надеется автор, она также будет полезна для инженеров и научных работников, не специализирующихся в области моделирования турбулентности. Во втором издании исправлены обнаруженные автором опечатки, имевшие место в первом издании [6], уточнено изложение некоторых вопросов, а также добавлен значительный объем нового материала.

1. Уравнения $k-\varepsilon$ модели

1.1. Переход к развитой турбулентности

Развитая турбулентность возникает в результате развития гидродинамических неустойчивостей течений. Источником развития неустойчивостей являются начальные возмущения газодинамических величин, которые, в общем случае, представляют собой суперпозицию различных мод, характеризующихся своей амплитудой и волновым вектором. Характерным примером для наиболее интересующего нас случая развития неустойчивости на границе различных сред является наличие начальных возмущений контактной поверхности на границе двух сред: $a_0 = a_0(x, y)$. Для анализа развития возмущений контактной поверхности удобно разложить эту функцию в ряд (либо интеграл) Фурье и рассматривать эволюцию амплитуд отдельных гармоник (мод).

По существующим представлениям, развитие гидродинамических неустойчивостей может проходить следующие стадии:

1) рост малых возмущений в линейном режиме $(2\pi a/\lambda << 1)$, когда все моды развиваются независимо;

2) нелинейная стадия роста возмущений $(2\pi a/\lambda \sim 1)$, характеризуемая замедлением скорости роста и взаимодействием мод;

3) турбулентная стадия развития неустойчивости $(\mathrm{Re} \le\sim 10^4)$, характеризуемая усложнением картины течения и появлением характерных крупномасштабных вихревых структур течения, не содержавшихся в начальном возмущении;

4) переход к развитой турбулентности (mixing transition, $\mathrm{Re} >\sim (1 \div 2)\cdot 10^4$), при котором развивается хаотичная мелкомасштабная составляющая течения, что приводит к «замыванию» крупномасштабных структур и почти полному перемешиванию до молекулярного уровня;

5) стадия развитой турбулентности, на которой, предположительно, характеристики течения перестают зависеть от числа Рейнольдса.

Внешнее число Рейнольдса здесь определяется по ширине зоны перемешивания L^*:

$$\mathrm{Re} = \frac{L^* (\mathrm{d}L^* / \mathrm{d}t)}{\nu}, \qquad (1.1.1)$$

где ν — кинематическая вязкость среды.

Для характеристики турбулентных течений используется также турбулентное число Рейнольдса Re_t, основанное на амплитуде турбулентных флуктуаций скорости и интегральном масштабе турбулентности, определяемом через массовую плотность кинетической энергии турбулентности k и скорость ее диссипации ε (определения данных величин см. в п. 1.2)

$$\Lambda = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \tag{1.1.2}$$

$$\mathrm{Re}_t = \frac{\Lambda (2k)^{1/2}}{\nu} = \frac{\sqrt{2}\, k^2}{\nu\varepsilon}. \tag{1.1.3}$$

Поскольку в зоне турбулентного перемешивания интегральный масштаб турбулентности (имеющий смысл характерного размера основных энергонесущих вихрей) порядка ширины зоны, а амплитуда турбулентных флуктуаций скорости порядка скорости роста зоны, турбулентное число Рейнольдса имеет приблизительно тот же порядок величины, что и (1.1.1).

Кроме Re и Re_t, характеристикой турбулентности является и тэйлоровское число Рейнольдса (Taylor Reynolds number) Re_T, основывающееся на тэйлоровском микромасштабе

$$\lambda_T = \frac{(2k)^{1/2}}{\left\langle \left(\dfrac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right\rangle^{1/2}}, \tag{1.1.4}$$

где u'_α — турбулентная составляющая скорости, а <> означает усреднение по турбулентным флуктуациям. Соответствующее (тэйлоровское) число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_T = \frac{\lambda_T (2k)^{1/2}}{\nu}. \tag{1.1.5}$$

В случае однородной изотропной турбулентности тэйлоровский и интегральный масштабы турбулентности связаны посредством (см., например, [7])

$$\lambda_T \approx \Lambda \; / \mathrm{Re}^{1/2}, \tag{1.1.6}$$

откуда $\mathrm{Re}_T \sim \mathrm{Re}^{1/2}$, так что переход к развитой турбулентности должен происходить при $\mathrm{Re}_T \sim 100$.

Основными масштабами турбулентности являются:

– внешний масштаб $L^* \sim \Lambda$, определяющий максимальные размеры турбулентных вихрей;

– колмогоровский масштаб

$$\lambda_K = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4} \approx \Lambda \big/ \mathrm{Re}_t^{3/4}, \tag{1.1.7}$$

ниже которого спектр турбулентности практически обрывается из-за вязкой диссипации.

Типичной является следующая картина энергообмена стационарной турбулентности с основным течением. Наиболее крупные вихри (длинноволновая часть спектра турбулентности) черпают энергию из основного течения, что определяет накачку энергии в турбулентность. Далее из-за взаимодействия различных мод эта энергия передается все более коротковолновым модам и наконец диссипируется в тепло. В силу (1.1.7) отношение характерных длин волн, где происходит накачка и диссипация энергии $\sim \mathrm{Re}^{3/4}$, т. е. с ростом Re области накачки и диссипации разъезжаются. Переход к развитой турбулентности связывают с появлением новой области в спектре турбулентности — инерционного интервала (см., например, [7]); т. е. интервала размеров, для которых турбулентные вихри движутся в основном по инерции. Они достаточно крупны, чтобы почти не испытывать влияния вязкости, но в то же время недостаточно велики, чтобы непосредственно получать энергию из основного течения. Как уже говорилось, появление инерционного интервала происходит при $\mathrm{Re} >\sim 10^4$, когда интервал между верхней и нижней границей спектра составляет $(\Lambda - \lambda_K)/\lambda_K >\sim 10^3$. Возникновение инерционного интервала приводит к хаотизации турбулентной составляющей течения, что позволяет применять для ее описания статистические методы.

1.2. Осреднение уравнений газовой динамики

Элементы вывода уравнений $k-\varepsilon$ модели можно найти в научной и учебной литературе, тем не менее для большей связности изложения воспроизведем его еще раз. Исходными являются уравнения Навье–Стокса для сжимаемой среды плюс уравнения баланса внутренней энергии и масс ее компонент.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_j) = 0, \tag{1.2.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla_j (\rho u_i u_j) = \nabla_j \sigma_{ij}, \qquad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla_j (\rho E u_j) = \left(\nabla_j u_i\right) \sigma_{ij}, \qquad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \rho C_k}{\partial t} + \nabla_j (\rho C_k u_j) = \nabla_j \left(\rho D \nabla_j C_k\right), \qquad (1.2.4)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений; E — массовая плотность внутренней энергии; C_k — массовая концентрация k-й компоненты среды.

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \qquad (1.2.5)$$

здесь τ_{ij} – тензор вязких напряжений,

$$\tau_{ij} = \mu\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)\right), \qquad (1.2.6)$$

где μ — материальная вязкость.

В случае развитого турбулентного течения значения всех газодинамических величин испытывают хаотические флуктуации около некоторых средних значений. Уравнения $k-\varepsilon$ модели получаются из системы (1.2.1)–(1.2.6) путем усреднения «по ансамблю», т. е. по различным статистическим реализациям данного течения. Удобно использовать два вида средних значений газодинамических величин:

1) средние по Рейнольдсу, т. е. средние по турбулентным флуктуациям (которые далее будем обозначать чертой сверху, а отклонение истинного значения от среднего — штрихом);

2) средние по Фавру, когда в качестве усредняющего весового множителя используется плотность среды (будем обозначать двумя чертами сверху, а отклонение — двумя штрихами).

Например, средняя по Фавру газодинамическая скорость определяется как

$$\overline{\overline{\vec{u}}} = \frac{\langle \rho\vec{u} \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{\langle \rho\vec{u} \rangle}{\overline{\rho}}. \qquad (1.2.7)$$

Истинное значение скорости (как и прочих газодинамических величин) может быть представлено в виде суммы средней и флуктуирующей части

$$\vec{u} = \overline{\vec{u}} + \vec{u}' = \overline{\overline{\vec{u}}} + \vec{u}'', \qquad (1.2.8)$$

причем среднее значение отклонения от среднего по Рейнольдсу, по определению, равно нулю $\langle \vec{u}' \rangle = 0$, а среднее значение отклонения от среднего по Фавру

$$\langle \vec{u}'' \rangle = \left\langle \vec{u} - \bar{\bar{\vec{u}}} \right\rangle = \left\langle \vec{u} - \frac{\langle \rho \vec{u} \rangle}{\bar{\rho}} \right\rangle = \frac{\langle \bar{\rho}\vec{u} - \langle (\bar{\rho} + \rho')\vec{u} \rangle \rangle}{\bar{\rho}} = -\frac{\langle \rho' \vec{u} \rangle}{\bar{\rho}} = -\frac{\langle \rho' \vec{u}' \rangle}{\bar{\rho}} \quad (1.2.9)$$

пропорционально потоку массы вследствие корреляции флуктуаций плотности и скорости (турбулентный поток массы). Из формул (1.2.8), (1.2.9) следует следующая связь между значениями скорости, усредненными по Рейнольдсу и Фавру

$$\bar{\vec{u}} = \bar{\bar{\vec{u}}} + \langle \vec{u}'' \rangle = \bar{\bar{\vec{u}}} - \vec{w}, \quad (1.2.10)$$

где $\vec{w}$ — скорость турбулентного переноса массы,

$$\vec{w} = \frac{\langle \rho' \vec{u}' \rangle}{\bar{\rho}} = -\langle \vec{u}'' \rangle. \quad (1.2.11)$$

Поскольку усреднение «по ансамблю» подразумевает суммирование газодинамических полей по совокупности турбулентных течений, знак усреднения коммутирует с операторами дифференцирования по времени и пространству, т. е. для любой величины f

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle, \quad \langle \vec{\nabla} f \rangle = \vec{\nabla} \langle f \rangle. \quad (1.2.12)$$

Усредняя «по ансамблю» (1.2.1), получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_j \left(\bar{\rho} \bar{\bar{u}}_j \right) = 0, \quad (1.2.13)$$

т. е. уравнение непрерывности для средних величин, как в «обычной» газовой динамике. Естественно, что стандартный вид данного уравнения получился благодаря использованию среднего по Фавру для газодинамической скорости. Как следует из (1.2.10), в случае использования среднего по Рейнольдсу в уравнении непрерывности появился бы источник, связанный с турбулентным потоком массы

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_j \left(\bar{\rho} \bar{u}_j \right) = -\nabla_j \left(\bar{\rho} w_j \right). \quad (1.2.14)$$

Отметим также, что в случае несжимаемой жидкости усреднение условия $\mathrm{div}\vec{u}=0$, очевидно, приводит к нулевой дивергенции средней по Рейнольдсу скорости, и, в общем случае, ненулевой дивергенции — для средней по Фавру: $\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\vec{u}}}\right)=\mathrm{div}(\vec{w})$.

Усреднение уравнения для газодинамической скорости (1.2.2) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial\overline{\rho}\overline{\overline{u}}_i}{\partial t}+\nabla_j\left(\overline{\rho}\overline{\overline{u}}_j\overline{\overline{u}}\right)_i=\nabla_j\left(\overline{\sigma}_{ij}+R_{ij}\right)=-\nabla_i\overline{P}+\nabla_j\overline{\tau}_{ij}+\nabla_j R_{ij}, \qquad (1.2.15)$$

где R_{ij} — тензор Рейнольдса[1],

$$R_{ij}=-\left\langle\rho\, u_i'' u_j''\right\rangle. \qquad (1.2.16)$$

Усредняя уравнение баланса внутренней энергии (1.2.3), получим

$$\frac{\partial\overline{\rho}\,\overline{\overline{E}}}{\partial t}+\nabla_j\left(\overline{\rho}\,\overline{\overline{E}}\overline{\overline{u}}_j\right)+\nabla_j\left\langle\rho E'' u_j''\right\rangle=-\overline{P}\left(\nabla_j\overline{u}_j\right)-\left\langle P\nabla_j u_j'\right\rangle+$$
$$+\left(\nabla_j\overline{\overline{u}}_i\right)\overline{\tau}_{ij}+\left\langle\left(\nabla_j u_i''\right)\overline{\tau}_{ij}\right\rangle+\left\langle\left(\nabla_j u_i''\right)\tau_{ij}'\right\rangle. \qquad (1.2.17)$$

В членах, содержащих давление, здесь удобнее использовать для скорости среднее по Рейнольдсу, чтобы выделить работу сил давления при сжатии среды рейнольдсовыми флуктуациями скорости $\left\langle P\nabla_j u_j'\right\rangle$, которая мала в случае несжимаемой турбулентности. Кроме этого члена, по сравнению с «обычной» вязкой газовой динамикой, уравнение (1.2.17) содержит дивергенцию турбулентного потока внутренней энергии

$$\vec{J}^{E}=\left\langle\rho E''\vec{u}''\right\rangle \qquad (1.2.18)$$

и среднее значение скорости вязкой диссипации кинетической энергии турбулентности в тепло

$$\varepsilon=\frac{1}{\overline{\rho}}\left\langle\left(\nabla_j u_i''\right)\tau_{ij}'\right\rangle. \qquad (1.2.19)$$

---

[1] В научной литературе более употребительным является определение тензора Рейнольдса, отличающееся от (1.2.16) знаком либо знаком и отсутствием плотности под знаком усреднения. Выбор определения по (1.2.16) связан со стремлением сохранить аналогию с определением тензора напряжений в «обычной» газовой динамике.

Усреднение уравнений баланса масс компонент среды (1.2.4) дает

$$\frac{\partial\bar{\rho}\bar{\bar{C}}_k}{\partial t}+\nabla_j\left(\bar{\rho}\bar{\bar{C}}_k\bar{\bar{u}}_j\right)+\nabla_j\left(J^{C_k}\right)_j=\nabla_j\left\langle\rho D\nabla_j C_k\right\rangle, \tag{1.2.20}$$

где $\vec{J}^{C_k}$ — турбулентный поток массы k-й компоненты,

$$\vec{J}^{C_k}=\left\langle\rho C_k''\vec{u}''\right\rangle. \tag{1.2.21}$$

Среднее значение кинетической энергии единицы объема слагается из кинетической энергии осредненного течения и турбулентности:

$$\frac{1}{2}\left\langle\rho\vec{u}^2\right\rangle=\frac{\bar{\rho}\left(\bar{\bar{\vec{u}}}\right)^2}{2}+\bar{\rho}k, \tag{1.2.22}$$

где k — массовая плотность кинетической энергии турбулентности,

$$k=\frac{1}{2\bar{\rho}}\left\langle\rho(\vec{u}'')^2\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle(\vec{u}'')^2\right\rangle+\frac{1}{2\bar{\rho}}\left\langle\rho'(\vec{u}'')^2\right\rangle\approx\frac{1}{2}\left\langle(\vec{u}'')^2\right\rangle. \tag{1.2.23}$$

Данная величина выражается через сумму диагональных компонент тензора Рейнольдса, а также может быть приближенно выражена через величину флуктуаций относительно средней по Рейнольдсу скорости:

$$k=-\frac{R_{jj}}{2\bar{\rho}}\approx\frac{1}{2}\left(\left\langle\left(\vec{u}'\right)^2\right\rangle+(\vec{w})^2\right). \tag{1.2.24}$$

Полезно записать уравнение для кинетической энергии среднего течения. Для этого умножим (1.2.15) на $\bar{\bar{u}}_i$ и просуммируем по компонентам. Для получения полных производных результат необходимо усреднить с результатом такой же процедуры, когда исходным уравнением является модификация (1.2.15) с левой частью в форме $\bar{\rho}\left(\partial\bar{\bar{u}}_i/\partial t\right)+\bar{\rho}\bar{\bar{u}}_j\nabla_j\bar{\bar{u}}_i$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{\rho}\left(\bar{\bar{\vec{u}}}\right)^2}{2}\right)+\nabla_j\left(\frac{\bar{\bar{u}}_j\bar{\rho}\left(\bar{\bar{\vec{u}}}\right)^2}{2}\right)=\bar{\bar{u}}_i\nabla_j\bar{\sigma}_{ij}+\bar{\bar{u}}_i\nabla_j R_{ij}. \tag{1.2.25}$$

Последний член, очевидно, описывает обмен кинетической энергией между средним течением и турбулентностью.

Для получения уравнение для полной кинетической энергии необходимо проделать аналогичную процедуру, стартуя с уравнения (1.2.2) для истинной скорости, домножая его на u_i и проводя усреднение. В результате будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \rho\left(\overline{\overline{u}}_i + u_i''\right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\nabla_j \left\langle \rho\left(\overline{\overline{u}}_i + u_i''\right)^2 \left(\overline{\overline{u}}_j + u_j''\right)\right\rangle = \left\langle u_i \nabla_j \sigma_{ij}\right\rangle. \qquad (1.2.26)$$

Вычитая из (1.2.26) уравнение баланса кинетической энергии среднего течения (1.2.25) и проведя простые преобразования, получим следующее уравнение для кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial \overline{\rho} k}{\partial t} + \nabla_j \overline{\overline{u}}_j \overline{\rho} k = \left(\nabla_j \overline{\overline{u}}_i\right) R_{ij} + \left\langle u_i'' \nabla_j \sigma_{ij}\right\rangle - \nabla_j \left\langle u_j'' \left(\rho\left(\vec{u}''\right)^2 / 2\right)\right\rangle. \qquad (1.2.27)$$

С учетом (1.2.11) и (1.2.19) его также можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho} k}{\partial t} + \nabla_j \overline{\overline{u}}_j \overline{\rho} k &= \left(\nabla_j \overline{\overline{u}}_i\right) R_{ij} + \left(\vec{w} \vec{\nabla} \overline{P}\right) - \overline{\rho}\varepsilon - \\ &- \left\langle \nabla_j u_i'' \right\rangle \overline{\tau}_{ij} - \nabla_j \left\langle \rho u_j'' (\vec{u}'')^2 / 2 - u_i'' \tau_{ij}\right\rangle. \end{aligned} \qquad (1.2.28)$$